

TESE DE  
DOUTORADO

# TEORIA DA SEÇÃO DE BOGOMOLNY PARA O ESTÁDIO

AUTOR: JULIO SANTIAGO ESPINOZA ORTIZ

*Este exemplar corresponde à redação  
final da tese de doutorado defendida pelo aluno  
Julio Santiago Espinoza Ortiz e aprovada pela  
comissão julgadora*

*13/5/97*

*Alfredo H. P. de Almeida*

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

CAMPINAS, MARÇO DE 1997

UNIDADE IFGW 1598  
 N.º CHAMADA: 7/UNICAMP m  
 Espo  
 V. 7 Ex.  
 TOMBO BC/ 31368  
 PROC. 281197  
 C ☐ D ☒  
 PREÇO AB. 11,00  
 DATA 13/02/97  
 N.º CPD 0.000.99501-8

## FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

Es65t

**Espinosa Ortiz, Júlio Santiago**

**Teoria da seção de Bogomolny para o estádio / Júlio Santiago Espinoza Ortiz. - . Campinas, SP: [s.n ], 1997.**

**Orientador: Alfredo Ozório de Almeida.**

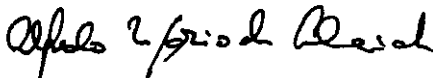
**Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física "Gleb Wataghin".**

**1. Mecânica quântica. 2. Comportamento caótico nos sistemas. 3. Problemas de condições de contorno. 4. \* Poincaré, Seção de. I. Almeida, Alfredo Osório de. Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.**

**PARECER DE APROVAÇÃO  
DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DE  
JULIO SANTIAGO ESPINOZA ORTIZ**

**Data: 21 / 03 / 97**

**BANCA EXAMINADORA:**



- Prof. Dr. Alfredo Miguel Ozório de Almeida (Orientador)



- Prof. Dr. Walter Felipe Wreszinski



- Prof. Dr. César Rogério de Oliveira



- Prof. Dr. José Antonio Roversi



- Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar

TESE DE  
DOUTORADO

TEORIA DA SEÇÃO DE BOGOMOLNY  
PARA O ESTÁDIO

AUTOR: JULIO SANTIAGO ESPINOZA ORTIZ

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
CAMPINAS, MARÇO DE 1997

# TEORIA DA SEÇÃO DE BOGOMOLNY PARA O ESTÁDIO

Tese de Doutorado submetida ao Instituto de Física  
"Gleb Wataghin" sob orientação do Professor Dr. Alfredo  
Miguel Ozorio de Almeida para a obtenção do título de  
Doutor em Física por Julio Santiago Espinoza Ortiz .

1997

*À Poeta Mercia Pessoa*

Lá vai março  
Você ali por um tri  
Mestre . Lá vai  
Que chega  
Eu aprendiz  
E não diz  
Mais nada  
Que chega  
A própria  
Morte

# AGRADEÇO

Ao professor Alfredo M. Ozorio de Almeida pelo empolgante  
projeto de tese, pela sempre acertada orientação.

Ao professor Marcus A.M. de Aguiar pela inicial motivação.

Aos colegas e amigos que acompanharam este estágio da minha vida .

À FAPESP pelo inestimável suporte financeiro.

## Resumo

O quarto de estádio pode ser decomposto em um retângulo e um quarto de círculo; em cada uma destas regiões a equação de Helmholtz é separável. Construímos explicitamente as funções de Green para cada região e sua matriz de Bogomolny quântica finita que inclui ondas reais e evanescentes. Os autovalores e autofunções, calculados com extrema eficiência, são comparados com os resultados de outros métodos numéricos, verificando-se sua precisão. São estudados os limites assintóticos dos elementos de matriz, sendo os autovalores resultantes comparados com os cálculos numéricos. Finalmente, deriva-se uma aproximação semiclássica para os zeros do determinante de Bogomolny.



# Abstract

The quarter-stadium can be decomposed into a rectangle and a quarter-circle; in each of these regions the Helmholtz equation is separable. We thus explicitly construct Green functions for both regions and a fully quantum mechanical Bogomolny finite matrix including real and evanescent waves is built. The eigenvalues and the eigenfunctions calculated with extreme efficiency and compared with other numerical methods, verifying their precision. We study the matrix elements in the asymptotic limit, the resulting eigenvalues are compared with the numerical one. Finally, we derive a semiclassical approximation for the zeroes of the Bogomolny determinant.

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 A Seção de Poincaré Quântica</b>	<b>6</b>
1.1 A condição de Quantização . . . . .	6
<b>2 Problema de Autovalores</b>	<b>12</b>
2.1 Problema de Autovalores em Uma Dimensão . . . . .	12
2.1.1 Partícula num Poço Unidimensional . . . . .	15
2.2 Problema de Autovalores em Duas Dimensões . . . . .	17
2.2.1 Partícula num Poço do tipo Retângulo . . . . .	17
2.2.2 Partícula num Poço do tipo Seção Circular . . . . .	21
<b>A Teoria de Bogomolny para o Estádio</b>	<b>26</b>
<b>3 I Teoria Quântica</b>	<b>27</b>
3.1 As Funções de Green-Bogomolny para o Estádio . . . . .	27
3.2 Os Modos Não Oscilantes . . . . .	33
3.2.1 Modos não oscilantes na região (2) . . . . .	33
3.2.2 Modos não oscilantes na região (1) . . . . .	35
3.3 A Densidade de Camada . . . . .	41

3.4	Resultados Numéricos . . . . .	44
<b>4</b>	<b>II Teoria Assintótica</b>	<b>52</b>
4.1	As funções de Bessel de grande argumento . . . . .	52
4.2	As Integrais sobre a Seção de Bogomolny . . . . .	54
4.2.1	Os elementos de matriz e as suas integrais . . . . .	55
4.2.2	O Fator de Normalização . . . . .	60
4.3	Resultados Numéricos . . . . .	62
<b>5</b>	<b>III Teoria Semiclássica</b>	<b>80</b>
5.1	As Órbitas Periódicas e o Mapa Semiclássico . . . . .	80
5.2	A densidade cumulativa média . . . . .	88
5.3	Resultados Numéricos . . . . .	90
	<b>Discussões e Perspectivas</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Ortogonalidade das funções caraterísticas do operador <math>\mathcal{L}</math></b>	<b>98</b>
<b>B</b>	<b>Avaliação aproximada das integrais na seção de Bogomolny</b>	<b>99</b>
<b>C</b>	<b>Expressões assintóticas para as Funções de Bessel</b>	<b>101</b>
<b>D</b>	<b>Integração assintótica pelo método da Borda Estacionaria</b>	<b>104</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>106</b>

# Lista de Figuras

0.1	O quarto de estádio construído como a união de um retângulo(2), e um quarto de círculo(1). A seção de Bogomolny é definida em $x = 0$ e as linhas verticais, na região (2), representam as órbitas clássicas verticais ou 'bouncing ball'.	4
1.1	O espaço de posições acessíveis é dividido em duas regiões finitas, indicadas como $V_1$ e $V_2$ , pela seção $\Sigma$ .	7
1.2	As duas seções auxiliares $\Sigma_{2\epsilon}$ e $\Sigma_{1\epsilon}$ originando duas novas regiões $V_{2\epsilon}$ e $V_{1\epsilon}$ , respectivamente.	8
2.1	Bilhar retangular e a sua seção de Bogomolny estabelecida em $x = 0$ .	18
2.2	Bilhar do tipo seção circular e a sua seção de Bogomolny estabelecida em $x = 0$ .	22
3.1	O quarto de estádio e a sua seção de Bogomolny definida em $x = 0$ .	28
3.2	Família de estádios	36
3.3	Potencial repulsivo ( $\nu$ é real) e potencial atrativo ( $\nu$ é complexo).	39
3.4	Os modos quando a ordem é complexa	40
3.5	A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com $a = 1$ .	45
3.6	Efeito no espectro da exclusão dos modos não oscilantes como função do número de onda $\kappa$ .	46

3.7	A dimensão da matriz de Bogomolny $\hat{G}$ como função do número de onda $\kappa$ .	47
3.8	Comparação do nosso espectro (EB) com o espectro de Vergini e Saraceno (EV), em unidades do espaçamento médio de níveis. No eixo horizontal, $n$ representa a seqüência de autovalores.	48
3.9	As autofunções obtidas como expansões de eq(3.4) e (3.15). $\kappa$ é o número de onda.	49
3.10	Dois exemplos do Wronskiano, $w(y) \geq 0$ , na seção.	50
3.11	A integral do wronskiano na seção. No eixo horizontal, $n$ representa a seqüência de autovalores.	51
4.1	A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com $a = 1$ .	63
4.2	Efeito no espectro da exclusão dos modos não oscilantes como função do número de onda $\kappa$ .	64
4.3	A dimensão da matriz de Bogomolny como função de $\kappa$ .	65
4.4	Comparação relativa do espectro assintótico com o espectro exato obtido no capítulo 3. No eixo horizontal, $n$ representa a seqüência de autovalores.	66
4.5	Comparação do espectro assintótico com o espectro exato em unidades de espaçamento médio. No eixo horizontal, $n$ representa a seqüência de autovalores.	67
4.6	A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com $a = 1$ . $\kappa \in (9\pi, 14\pi)$ . Aqui não estão sendo incluídas, nas integrais, as correções por fase estacionária.	70

4.7	A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com $\alpha = 1$ . $\kappa \in (9\pi, 14\pi)$ . Aqui já estão sendo incluídas, nas integrais, as correções por fase estacionária. . . . .	71
4.8	A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com $\alpha = 1$ . $\kappa \in (\pi, 14\pi)$ . Aqui estão sendo incluídas, nas integrais, as correções por fase estacionária. . . . .	72
4.9	Comparação relativa do espectro assintótico aproximado com o espectro assintótico da seção anterior. No eixo horizontal, $n$ representa a sequência de autovalores. . . . .	73
4.10	Comparação do espectro assintótico aproximado com o espectro assintótico da seção anterior em unidades de espaçamento médio. No eixo horizontal, $n$ representa a sequência de autovalores. . . . .	74
4.11	A dimensão da matriz de Bogomolny como função de $\kappa$ . . . . .	75
4.12	As autofunções obtidas como expansões de eq(3.4) e (3.15). $\kappa$ é o número de onda. . . . .	76
4.13	A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com $\alpha = 1$ . $\kappa \in (30\pi, 33\pi)$ . Aqui estão sendo incluídas, nas integrais, as correções por fase estacionária. . . . .	77
4.14	A dimensão da matriz de Bogomolny como função de $\kappa$ . . . . .	78
4.15	As autofunções obtidas como expansões de eq(3.4) e (3.15). $\kappa$ é o número de onda. . . . .	79

5.1	As órbitas classificadas pela fração de trajeto do mapa de Poincaré clássico. De cima para baixo esboçamos as quatro possibilidades de movimento entre as regiões (1) e (2) descritas no texto. . . . .	82
5.2	O movimento clássico da partícula, aos dois lados da seção, num bilhar pertencente à família de estádios, para o caso de uma partícula com pouca velocidade transversal à seção. . . . .	83
5.3	A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquan- to que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)) calculada segundo eq.(5.23), para o estádio com $a = 1$ . . . . .	91
5.4	A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), en- quanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade sua- vizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)) calculada segundo eq.(5.23), para o estádio com $a = 5$ . . . . .	92

# Introdução

A antiga teoria quântica é baseada na condição de quantização de Bohr Sommerfeld. Segundo esta, o sistema clássico é quantizado através da variável de ação associada ao toro invariante[1]. Por outro lado, foi reconhecido por Einstein[2], que este método só podia ser usado em sistemas cujas trajetórias estão sobre os toros invariantes. Este mesmo método não podia conectar os sistemas classicamente caóticos com a sua contraparte quântica.

Os métodos semiclássicos usados para tratar sistemas quânticos estão normalmente associados com o método WKB ou com a sua generalização para vários graus de liberdade, Van Vleck 1928[3], para obter expressões semiclássicas do espectro e auto-funções de sistemas quânticos. Estes métodos só são aplicáveis em sistemas integráveis, mas não para sistemas caóticos.

Em 1982 Gutzwiller[4] mostrou que a aproximação semiclássica para a integral de caminho de Feynman[5] podia ser usada para computar valores aproximados de energia dos autovalores de um sistema quântico (Anisotropic Kepler Problem) cuja contraparte clássica é caótica. O trabalho de uma longa série de artigos por ele (Gutzwiller[6, 7, 8, 9, 10, 11, 4]) e por Balian e Block ([12, 13]) juntou as órbitas periódicas de um sistema clássico com o espectro do correspondente sistema quântico. A chamada de Fórmula do Traço Semiclássica apresenta a dificuldade matemática de ser uma série divergente. Consideráveis esforços tem sido investidos tentando salvar esta dificuldade: Por meio do método de ressonâncias, que é baseado em princípios matemáticos [14],[15],[16],[17] ou sobre idéias físicas. Estas últimas introduziram o análogo quântico de uma seção de Poincaré clássica, o método da seção, no limite semiclássico.



Classicamente, as características qualitativas principais do sistema contínuo são deduzíveis a partir do mapa no espaço de fase reduzido. Se quase todas as órbitas atravessarem a seção, quase todas as órbitas periódicas do sistema clássico aparecerão como sendo pontos periódicos no mapa de Poincaré. Estas órbitas periódicas e pontos periódicos proliferarão exponencialmente com o período tanto no sistema como no mapa, se a dinâmica for caótica.

O espectro de energia de um sistema quantizado relaciona-se com as órbitas periódicas clássicas e as órbitas periódicas clássicas intersectam a seção de Poincaré. Por isto, é natural pensar em que se possa estabelecer uma analogia com o problema clássico, tentando construir um mapa quântico reduzido definido na seção, com a finalidade de obter toda a informação quântica do sistema.

A construção de um mapa quântico sobre uma seção foi feita por Bogomolny [18, 19]. Neste trabalho Bogomolny construiu uma função de Green semiclássica a partir da convolução de duas funções de Green definidas em cada lado da seção. Este esforço se limitou, principalmente, a derivar a fórmula do traço de Gutzwiller como uma expressão vinda da condição de quantização.

Além do limite semiclássico, cabe indagar a possibilidade de colocar esta teoria de forma exata, quânticamente. Aqui, resgata-se a proposta de Prosen[20], que baseada na teoria de espalhamento de Doron e Smilansky[21], fornece uma decomposição intuitiva de movimento ligado e movimento espalhado a ambos lados da seção de Bogomolny.

Estritamente, o espalhamento físico só acontece para um número finito de modos propagantes, isto é, canais abertos à direita e à esquerda da seção. Além deles, há um número discreto e infinito de modos evanescentes que devem ser considerados para uma exata teoria de quantização. Estes modos evanescentes, que foram incluídos no operador unitário de Prosen [20], não se correspondem com o movimento clássico e por isto não são considerados no propagador semiclássico de Bogomolny. Suponha-se, que trasladamos ou rodamos a seção como para perder uma componente significativa do movimento clássico; para ser específicos, um conjunto de órbitas periódicas curtas deixa de cruzar a seção. A

construção dos canais de espalhamento será insensível a esta alteração, enquanto que o propagador semiclássico será afetado. Concluímos que o efeito desta alteração da seção é que a contribuição dos modos não oscilantes deve aumentar relativamente às contribuições dos modos propagantes, únicos a sobreviver no limite semiclássico.

Em um recente artigo, Ozorio de Almeida[22], tratando sistemas separáveis, discute a construção da seção de Bogomolny e a condição de autovalores de maneira exata, quânticamente, sem invocar aproximação semiclássica nenhuma. Destacam-se os seguintes resultados : A função de Green, geral, obtida por Bogomolny pode admitir zeros espúrios; mas impondo nela restrições especiais, a condição de Bogomolny torna-se necessária e suficiente. Torna-se claro que, em termos de uma teoria exata, quântica, para definir uma boa seção, só se pode partir do critério de que todas as autofunções possam ser expressas como sendo do tipo potenciais de uma camada,  $\mu$ , sobre a seção  $\Sigma$ ,

$$\Psi_E = \int_{\Sigma} \mu(Q) G(q, Q; E) dQ,$$

ao invés do critério intuitivo semiclássico de Bogomolny, pelo qual todas as órbitas devem atravessar a seção. Só se pode invocar a estrutura clássica das órbitas periódicas após o entendimento da aproximação semiclássica vinda da condição exata de autovalores. Esta não pode preceder a definição da função de Green.

A dimensão do espaço de Hilbert de  $\mu$  para a qual  $\Psi_E$  é propagante, é finita, mas crescerá com a energia. Se perturbarmos o sistema da separabilidade, grande parte da estrutura encontrada será perdida, mas a divisão em modos que oscilam ao menos numa região e os que decaem longe da seção deverá ser mantida. O estudo do simples caso de sistemas separáveis por Ozorio de Almeida[22] revelou explicitamente que o movimento clássico que não intersecta a seção de Bogomolny afeta a condição de quantização através dos modos não oscilantes. Naturalmente, sistemas separáveis são uma ferramenta para este formalismo, mas bem do que o seu oposto. Mais interessante é a investigação de Prosen[20] para sistemas semi-separáveis, isto é, sistemas que são separáveis em cada lado da seção, mas o sistema completo não o é. A dinâmica clássica é não trivial, contendo a mistura genérica de movimento regular e caótico. Outro sistema separável é o 'quarto

de estádio'. Colocando a seção de Bogomolny como na figura (0.1), dividimos este bilhar num retângulo e um quarto de círculo.

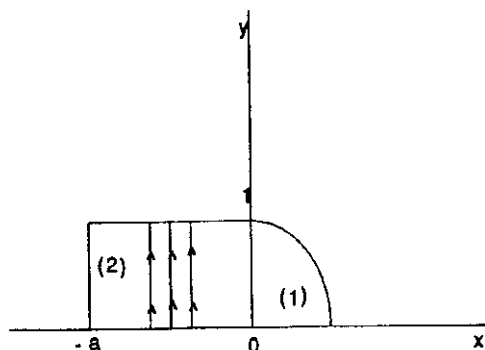


Figura 0.1: O quarto de estádio construído como a união de um retângulo(2), e um quarto de círculo(1). A seção de Bogomolny é definida em  $x = 0$  e as linhas verticais, na região (2), representam as órbitas clássicas verticais ou 'bouncing ball'.

É curioso que o esquema usual de quantização do tipo espalhamento não é conveniente neste sistema. O retângulo na figura (0.1) pode ser facilmente juntado a um tubo semi-infinito a direita da seção. Podemos também juntar um tubo similar à esquerda do quarto de círculo, mas o sistema resultante não será separável, isto porque os modos individuais não satisfazem as corretas condições de borda. Então, é melhor tomar vantagem da construção original de Bogomolny para obter a função de Green à direita numa base separável como explicitou Ozorio de Almeida[22]. Isto pode ser interpretado como espalhamento não físico num tubo infinitamente enrolado, mas bem do que num tubo linear.

O propósito desta tese é estudar a mecânica quântica do quarto de estádio desde o ponto de vista desta seção particular de Bogomolny, além dos limites assintóticos e semiclássicos, que são estabelecidos a partir da sua formulação exata, quânticamente.

No capítulo 1 estabelecemos a analogia entre a seção de Bogomolny e uma seção de Poincaré clássica e discutimos a condição de autovalores, quântica, a partir de

uma equação de compatibilidade sobre a própria seção.

No **capítulo 2** estudamos as condições nas quais a condição de quantização de Bogomolny se faz necessária e suficiente. Para isto discutimos a construção das funções de Green-Bogomolny para sistemas que são separáveis, isto em termos de uma mecânica quântica exata.

Note-se que o ‘quarto de estádio’, um sistema paradigmático totalmente caótico[23], pode ser exatamente decomposto em formas alternativas de movimento, por separado, tanto clássica quanto quanticamente. No **capítulo 3**, decomparamos o quarto de estádio em um retângulo e um quarto de círculo. Assim, construímos as funções de Green para ambas regiões e uma matriz de Bogomolny, isto dentro de uma mecânica quântica exata. Nestes mesmos termos, são discutidas as contribuições dos modos não oscilantes. Outro fato de interesse é a família marginal de órbitas clássicas periódicas do tipo bouncing ball mostradas na figura (0.1), que não cruzam a seção, podemos investigar como isto afeta as contribuições dos modos evanescentes, aos níveis de energia e as autofunções, correspondentes. É especialmente interessante discutir a relação entre nossos resultados exatos com os de Tanner[24], que usou a mesma seção para obter uma função de Green semiclássica.

No **capítulo 4** calculamos para o estádio os autovalores e as autofunções de estados altamente excitados. Para isto, fazemos um rápido estudo do regime assintótico das funções de Bessel. Isto permite calcular as diferentes ordens que fazem com que  $J_{\nu_n}(\kappa) = 0$  e facilita os cálculos analíticos para as diversas integrais sobre a seção que são resolvidas assintoticamente.

No **capítulo 5** invocamos a estrutura clássica das órbitas periódicas, que atravessam a seção de Bogomolny, a partir da condição de autovalores, quântica. Construímos o nosso operador de Bogomolny, que descreve o mapa semiclássico e por último obtemos uma expressão aproximada da densidade cumulativa média de estados.

Finalmente, no **capítulo 6** apresentamos as nossas discussões e perspectivas.

# Capítulo 1

## A Seção de Poincaré Quântica

Aqui estabeleceremos a analogia entre a seção de Bogomolny e uma seção de Poincaré clássica. Além disto, discutiremos a condição de autovalores, quântica, a partir de uma equação de compatibilidade sobre a própria seção.

A exposição da teoria aqui apresentada basea-se principalmente na discussão levantada por Ozorio de Almeida [22].

### 1.1 A condição de Quantização

Podemos definir uma seção de Poincaré clássica de um sistema de  $L$  graus de liberdade como sendo uma superfície  $\Sigma$  no espaço de fases  $2L$ -Dimensional. Isto elimina uma coordenada, entretanto o correspondente momento é forçado a manter a condição de conservação da energia. Denotando, por  $q$  a posição no espaço de configurações total, o  $Q$  será reservado para estabelecer a sua restrição numa superfície  $(L - 1)$ -Dimensional; de forma análoga os correspondentes momentos serão denotados por  $p$  e  $P$ , respectivamente. Portanto  $(Q, P)$  são coordenadas de uma superfície de  $2(L - 1)$  dimensões. Nos concentraremos no caso  $L = 2$ , contudo ressaltamos que o método a ser apresentado é bem geral.

No caso em que as coordenadas são separáveis, a superfície  $\Sigma$  definida em  $q = 0$  dividirá o espaço de posições acessíveis em duas regiões finitas indicadas como  $V_1$

e  $V_2$ , como se mostra na figura (1.1). Não obstante, também poderíamos ter considerado o caso no qual tanto  $V_1 \rightarrow \infty$ , quanto  $V_2 \rightarrow \infty$ , pois dado um valor finito de energia presume-se que as órbitas clássicas são ligadas e portanto interceptarão repetidas vezes a seção  $\Sigma$ . Estabelece-se o Mapa de Poincaré  $(P, Q) \rightarrow (P', Q')$ , com o ponto de retorno de cada órbita originado por cada ponto na seção  $\Sigma$  e de forma que o momento transverso a  $\Sigma$  tem o mesmo sinal [25].

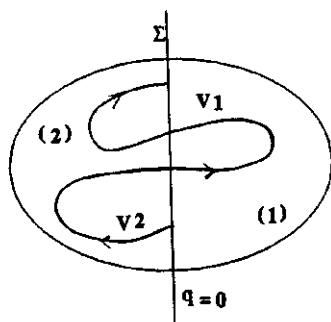


Figura 1.1: O espaço de posições acessíveis é dividido em duas regiões finitas, indicadas como  $V_1$  e  $V_2$ , pela seção  $\Sigma$ .

O princípio de incerteza impede o conhecimento simultâneo de coordenadas e momentos de um sistema quântico correspondente a dado sistema clássico. A seção de Bogomolny é portanto construída exclusivamente sobre o espaço de posições, definindo-se então uma superfície de  $(L - 1)$  dimensões. Enfatiza-se que a construção do mapa de Poincaré clássico só se faz possível por conhecermos a dinâmica clássica em cada sub-região,  $V_1$  e  $V_2$ . Do mesmo modo, só poderemos pretender construir o correspondente mapa quântico a partir do conhecimento da mecânica quântica a ambos os lados da seção em  $V_1$  e  $V_2$ . Aqui esta informação é proporcionada pelo par de funções de Green complementares,  $G_1(q, q'; E)$  e  $G_2(q, q'; E)$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

- i)  $G_j$  satisfaz a equação de Schrodinger não homogênea dentro de cada região  $V_j$

$$[E - \hat{H}] G_j(q, q'; E) = \delta(q - q') \quad ; j=1,2.$$

- ii) Nas bordas  $B_j$ , que limitam o volume  $V_j$ , as funções de Green  $G_j$  obedecem as mesmas condições de contorno que as autofunções de  $\hat{H}$ .
- iii) As funções de Green  $G_j(q, q'; \lambda)$  podem ser arbitrárias na seção  $\Sigma$ .

Aqui se faz necessário estender o volume  $V_1 \rightarrow V_{1\epsilon}$  assim como  $V_2 \rightarrow V_{2\epsilon}$ , de forma que ambas regiões se sobreponham. Geramos assim duas novas seções  $\Sigma_{1\epsilon}$  e  $\Sigma_{2\epsilon}$  como na fig.(1.2). Com isto, a condição i) é aplicável dentro de cada volume  $V_{1\epsilon}$  e  $V_{2\epsilon}$ , enquanto que a condição ii) refere-se a um pequeno alongamento das bordas.

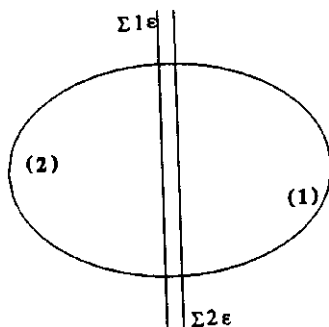


Figura 1.2: As duas seções auxiliares  $\Sigma_{2\epsilon}$  e  $\Sigma_{1\epsilon}$  originando duas novas regiões  $V_{2\epsilon}$  e  $V_{1\epsilon}$ , respectivamente.

Definimos a função de Green  $G_j(q, q'; E)$  como solução de i) numa região limitada pelas bordas  $B_j + B'_{j\epsilon}$  que inclui  $V_j$ . O Hamiltoniano deve coincidir com  $\hat{H}(\hat{p}, q)$  dentro de  $V_j$ , mas pode ser definido arbitrariamente no espaço restante. Evidentemente, também podemos tomar  $B'_{j\epsilon} \rightarrow \infty$ , entretanto  $B_j$  pode ou não ser finito.

Torna-se necessário fazer a hipótese de que existe alguma autofunção  $\Psi_n$  correspondente ao problema

$$\hat{H}\Psi_n(q) = E\Psi_n(q) \quad (1.1)$$

dentro do volume  $V_1 + V_2$  e que cumpre as condições específicas de contorno sobre as bordas  $B_1 + B_2$ .

Estabelece-se o anzats de que as soluções na região (1) podem ser escritas na forma de um potencial de uma camada

$$\Psi_{1E}(q) = \int_{\Sigma_{1\epsilon}} G_1(q, Q'_\epsilon; E) \mu_1(Q'_\epsilon) dQ'_\epsilon. \quad (1.2)$$

Embora (1.2) satisfaz automaticamente a condição correta sobre o contorno  $B_1$ , não podemos assumir que todas as soluções tenham esta forma. Esta questão se tornará mais clara no próximo capítulo, quando estudarmos o caso mais simples de movimento numa dimensão.

A função do tipo 'potencial de uma camada'  $\Psi_{1E}$  apresenta descontinuidade na derivada em  $\Sigma_{1\epsilon}$ , assim como  $G_1(q, Q'_\epsilon; E)$  é também descontínua na derivada em  $q = Q'_\epsilon$ . Por causa disto não se pode representar uma autofunção suave do problema em ambos os lados de  $\Sigma_{1\epsilon}$  por (1.2) em todo  $V$ . Suponha que podemos casar exatamente as funções de onda  $\Psi_{1E}$  e  $\Psi_{2E}$  ao longo de  $\Sigma$ . Para isto,  $\Psi_{2E}(q)$  é definida em  $V_{2\epsilon}$  também por (1.2), mas com a prévia troca de subíndices  $1 \rightarrow 2$

$$\Psi_{2E}(q) = \int_{\Sigma_{2\epsilon}} G_2(q, Q''_\epsilon; E) \mu_2(Q''_\epsilon) dQ''_\epsilon. \quad (1.3)$$

Não podemos esquecer que as funções  $\mu_1(q)$  e  $\mu_2(q)$ , que auxiliam a definir  $\Psi_{1E}$  e  $\Psi_{2E}$ , ainda são desconhecidas. A estratégia para resolver o problema se sustenta na idéia de usar uma das soluções do tipo 'potencial de uma camada' e estendê-la ao outro lado da região. Em uma dimensão podemos aproveitar o fato de que a equação de Helmholtz tem soluções analíticas, isto nos permite usar a continuação analítica. Num caso mais geral podemos resolver o problema de Cauchy em  $V_2$  usando como condição inicial  $\Psi_{1E}(Q)$  e  $\frac{\partial}{\partial n} \Psi_{1E}(Q)$ . A solução resultante suavizada em  $V_1 + V_2$  satisfaz a correta condição sobre  $B_1$  e será chamada simplesmente de  $\Psi_E(q)$  de aqui em adiante. Para obter a condição sobre  $\mu(Q)$  a fim de que  $\Psi_E(q)$  seja uma autofunção do problema total de autovalores seguimos o procedimento de Bogomolny[18, 19], relacionando a condição i) e a equação (1.1). Desta forma obtemos a identidade de Green (segunda) para depois, com ajuda do teorema de Stokes, chegarmos à expressão



$$\frac{\hbar^2}{2} \int_{B_2+\Sigma} dQ [\Psi_E(Q) \partial_n G_2(Q, Q'_\epsilon; E') - G_2(Q, Q'_\epsilon; E') \partial_n \Psi_E(Q)] \\ + (E' - E) \int_{V_2} G_2(q, Q'_\epsilon; E') \Psi_E(q) dq = 0, \quad (1.4)$$

onde  $Q'_\epsilon$  é escolhido fora de  $V_2$  (dentro de  $V_1$ ) de modo que

$$\int_{V_2} \delta(q - Q'_\epsilon) \Psi_E(q) dq = 0$$

e  $\partial_n$  é a derivada normal à borda em  $B_2$ . Note-se que a expressão integral (1.4) decompõe-se da forma

$$\int_{B_2+\Sigma} dQ \square \equiv \int_{B_2} dQ \square + \int_{\Sigma} dQ \square.$$

Se  $\Psi_E(q)$  for uma autofunção a integral sobre  $B_2$  se anula, isto porque  $\Psi_E(Q)$  e  $G_2(Q)$  satisfazem as mesmas condições de borda. Além disto, se  $G_2(q, Q'_\epsilon; E')$  não tiver polos podemos também eliminar a integral sobre o volume  $V_2$  escolhendo  $E' = E$ . Substituindo (1.2) na integral sobre  $\Sigma$  e mudando a ordem da integração obtemos

$$\int_{\Sigma_{1\epsilon}} \hat{G}(Q''_\epsilon, Q'_\epsilon; E) \mu_1(Q'_\epsilon) dQ'_\epsilon = 0, \quad (1.5)$$

onde

$$\hat{G}(Q''_\epsilon, Q'_\epsilon; E) = \frac{\hbar^2}{2} \int_{\Sigma} dQ \left[ G_1(Q, Q'_\epsilon; E) \frac{\partial}{\partial n} G_2(Q, Q''_\epsilon; E) - G_2(Q, Q''_\epsilon; E) \frac{\partial}{\partial n} G_1(Q, Q'_\epsilon; E) \right].$$

Obtemos os autovalores para o problema total como uma condição de compatibilidade para (1.5) a partir da solução de :

$$\det \hat{G}(Q''_\epsilon, Q'_\epsilon; E) = 0. \quad (1.6)$$

Isto significa que o operador  $\hat{G}$ , que leva as funções em  $\Sigma_{1\epsilon}$  à seção sobre  $\Sigma_{2\epsilon}$ , deve se anular na energia  $E$ . Levando  $\Sigma_{1\epsilon}$  e  $\Sigma_{2\epsilon}$  sobre  $\Sigma$ , isto é fazendo  $Q'_\epsilon \rightarrow Q'$  e  $Q''_\epsilon \rightarrow Q''$ , a expressão acima torna-se uma condição sobre as funções de Green complementares na seção de Poincaré  $\Sigma$ . Estabelecidos os valores de  $E$  que satisfazem a condição (1.6), a densidade de camada  $\mu$  é calculada com auxílio da equação (1.5).

Note-se que poderíamos ter formulado o problema com as condições iniciais  $\Psi$  e  $\partial_n \Psi$  definidas na região 2, contudo a equação de compatibilidade acima seria a mesma. Além de mais, na equação (1.5) seria apenas trocar  $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ . Isto pode ser interpretado como uma condição para a existência de uma única densidade na seção de Bogomolny.

Em torno desta formulação há duas questões que devem ser formuladas. É possível que nem todas as autofunções do problema possam ser expressas na forma (1.2) – (1.3), neste caso (1.6) não será uma condição necessária. Por outro lado se  $G_j$  tiver um autovalor zero para uma dada energia, (1.6) também será nula para a sua correspondente autofunção  $\mu(Q)$ . Então a condição de Bogomolny não seria suficiente já que proporcionaria zeros espúrios.

# Capítulo 2

## Problema de Autovalores

Neste capítulo discutiremos as condições baixo as quais a condição de quantização de Bogomolny se faz necessária e suficiente. Para isto estudaremos a construção das funções de Green-Bogomolny para sistemas separáveis em termos de uma mecânica quântica exata.

Com estes fins, revisamos o problema de autovalores em uma dimensão e construímos a sua função de Green que após é usada para construir as funções de Green auxiliares para sistemas que são separáveis em duas dimensões.

### 2.1 Problema de Autovalores em Uma Dimensão

Em alguns casos especiais a equação de Schrodinger independente do tempo é separável em suas variáveis em regiões  $\Gamma$  do espaço de configurações, assim o problema de autovalores se reduz a um problema do tipo Sturm-Liouville[26]:

$$\{\partial_x[r(x)\partial_x] - s(x) - \lambda t(x)\} V(x) = 0, \quad -a_2 \leq x \leq a_1, \quad (2.1)$$

sujeito às seguintes condições de borda

$$\begin{aligned} \alpha_1 V(a_1, \lambda) + \beta_1 \partial_x V(a_1, \lambda) &= 0 \\ \alpha_2 V(-a_2, \lambda) + \beta_2 \partial_x V(-a_2, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Seguindo o algoritmo estabelecido no capítulo 1: Gera-se duas subregiões finitas indicadas por  $i = 1$  e  $2$  nos intervalos  $x \in [-a'_1, a_1]$  e  $x \in [-a_2, a'_2]$ , respectivamente. Evidentemente, em uma dimensão a seção de Bogomolny se reduz a um único ponto, que será definido na origem  $x = 0$ . Em cada uma destas subregiões construímos as funções de Green sujeitas às equações auto-adjuntas

$$\{\partial_x[r_i(x)\partial_x] - s_i(x) - \lambda t_i(x)\} g_i(xx'; \lambda) = \delta(x - x') \quad \begin{array}{l} i = 1 \quad ; -a'_1 \leq x \leq a_1. \\ i = 2 \quad ; -a_2 \leq x \leq a'_2. \end{array} \quad (2.3)$$

e pelas condições de borda

$$i = 1 \quad \begin{cases} \alpha_1 g_1(a_1, x'; \lambda) + \beta_1 \partial_x g_1(a_1, x'; \lambda) = 0 \\ \alpha_1 g_1(-a'_1, x'; \lambda) + \beta_1 \partial_x g_1(-a'_1, x'; \lambda) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$i = 2 \quad \begin{cases} \alpha_2 g_2(a'_2, x'; \lambda) + \beta_2 \partial_x g_2(a'_2, x'; \lambda) = 0 \\ \alpha_2 g_2(-a_2, x'; \lambda) + \beta_2 \partial_x g_2(-a_2, x'; \lambda) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Para  $x \geq 0$  as funções  $r_1, s_1, t_1$  coincidirão com  $r(x), s(x), t(x)$  na equação (2.1), enquanto estas últimas coincidirão com  $r_2, s_2, t_2$  para  $x \leq 0$ . Note que a primeira condição (2.4) e a segunda condição (2.5) juntas satisfazem automaticamente a condição (2.2).

Dadas duas soluções da equação (2.1) denotadas como  $U$  e  $V$ , estas serão linearmente dependentes, em  $x = 0$ , sempre que o Wronskiano delas

$$W = V\partial_x U(x) - U(x)\partial_x V(x)|_{x=0} \equiv 0.$$

Do mesmo modo, se  $r(x)|_{x=0} \neq 0$ , as duas funções de Green definidas acima casarão se o Wronskiano delas se anular em  $x = 0$ ; tornando-se solução do problema de Sturm-Liouville (2.1). Note-se que só certos valores de  $\lambda$  cumprirão a condição de nulidade do Wronskiano, em  $x = 0$ , que será denotado de  $\hat{g}(x', x''; \lambda)$

$$\hat{g}(x', x''; \lambda) = [g_1(x, x'; \lambda)\partial_x g_2(x, x''; \lambda) - g_2(x, x''; \lambda)\partial_x g_1(x, x'; \lambda)]_{x=0} = 0 \quad (2.6)$$

Na linguagem desta teoria, podemos dizer que a condição sobre  $\hat{g}$  impõe a continuação analítica de  $g_1(x, x'; \lambda)$  para satisfazer as equações (2.1) – (2.2). Todas as funções satisfazendo (2.1) – (2.2) para  $x \geq 0$  serão proporcionais a  $g_1(x, x'; \lambda)$ .

A condição sobre  $\hat{g}(x', x''; \lambda)$  deve proporcionar todos os autovalores  $\lambda$  do problema de Sturm-Liouville se for garantido que  $g_1(0, x'; \lambda)$  e  $g_2(0, x''; \lambda)$  não são nulos. Neste caso poderemos tomar o limite  $x' \rightarrow 0$  e  $x'' \rightarrow 0$  de maneira que, ao se anular  $\hat{g}(0, 0; \lambda)$ , o autovalor  $\lambda$  é obtido de uma função definida sobre um único ponto (a seção em uma dimensão).

Como é afirmado na ref.[22], é importante enfatizar que as funções  $g_i(x, x'; \lambda)$  não são as funções de Green usuais adotadas no tratamento do problema de Sturm-Liouville[27], pois a nossa função de Green é obtida resolvendo um problema onde  $\lambda \neq 0$  dentro de uma equação integral. Entretanto as funções de Green  $g_i(x, x'; \lambda)$  podem ser construídas da maneira usual.

Seja  $v_1(x)$  a solução que satisfaz a versão homogênea da equação (2.3) e a primeira condição (2.4) e  $u_2(x)$  uma outra que também satisfaz a versão homogênea da equação(2.3), mas com a segunda condição (2.5). Com isto a função de Green  $g_1(x, x', \lambda)$  pode sempre ser construída na forma

$$g_1(x, x', \lambda) = \begin{cases} c_1 u_1(x') v_1(x); & a_1 \geq x \geq x' \\ c_1 v_1(x') u_1(x); & -a'_1 \leq x \leq x'. \end{cases} \quad (2.7)$$

Uma outra expressão similar também pode ser escrita para  $g_2(x, x'; \lambda)$

$$g_2(x, x', \lambda) = \begin{cases} c_2 u_2(x') v_2(x); & a'_2 \geq x \geq x' \\ c_2 v_2(x') u_2(x); & -a_2 \leq x \leq x'. \end{cases} \quad (2.8)$$

Substituindo estas duas expressões  $g_1(x, x'; \lambda)$ ,  $g_2(x, x'; \lambda)$  na condição de compatibilidade (2.6) obtemos

$$\hat{g}(x', x''; \lambda) = c_1 c_2 \{v_1(0) \partial_x u_2(0) - u_2(0) \partial_x v_1(0)\} u_1(x') v_2(x''). \quad (2.9)$$

Note-se que  $\hat{g}(x', x''; \lambda)$  é proporcional à função de Green para o problema complementar de Sturm-Liouville com coeficientes  $r_1, s_1, t_1$  no caso de  $x \geq 0$  e  $r_2, s_2, t_2$  quando  $x \leq 0$ . Não obstante os coeficientes da função de Green  $g_1(x, x'; \lambda)$ ,  $g_2(x, x''; \lambda)$  não sejam os corretos a nossa função de Green complementar também se anula se  $u_1(x') = 0$  ou  $v_2(x'') = 0$  causando zeros espúrios dependentes da escolha dos pontos  $x', x'', -a'_1, a'_2$ .

Uma maneira de evitá-los consiste em levar as bordas,  $a'_1$  e  $a'_2$ , bem longe até o infinito e impor que na região semi-infinita só existam soluções do tipo ondas propagantes viajando nas direções  $\pm\infty$ [22]. Vemos como isto é feito quando lidamos com o problema de uma partícula num poço unidimensional.

## 2.1.1 Partícula num Poço Unidimensional

A partícula de massa unitária é confinada num poço unidimensional definido na região  $x \in [-a, 1]$ . Só serão do nosso interesse as soluções que se anularem nas bordas (condição de Dirichlet).

Seguindo o formalismo prévio, torna-se necessário dividir a região em duas regiões parciais semi-infinitas, para depois construir as respectivas funções de Green. Vejamos o caso de  $g_2(x, x'; k)$

$$g_2(x, x'; k) = \begin{cases} v_2(x')e^{ikx}; & x' \leq x \leq \infty \\ u_2(x')\sin k(x+a); & -a \leq x \leq x'. \end{cases} \quad (2.10)$$

Note-se que esta escolha satisfaz automaticamente a condição de Dirichlet em  $x = -a$ . Como é usual, para construir uma função de Green impõe-se as seguintes condições:

- Continuidade da função ,
- Descontinuidade da derivada da função.

Com estas duas condições requeridas em  $x = x'$ , encontramos as funções  $u_2(x')$  e  $v_2(x')$

$$g_2(x, x'; k) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sin k(x' + a)e^{ik(x+a)}; & x' \leq x \leq \infty \\ \frac{1}{k} e^{ik(x'+a)} \sin k(x+a); & -a \leq x \leq x'. \end{cases} \quad (2.11)$$

Vea-se que  $u_2(x')$  nunca será zero e portanto não contribuirá com zeros espúrios na condição de autovalores. Com estas mesmas considerações obtemos a função de Green

$g_1(x, x'; k)$  agora na região  $< -\infty, 1]$ :

$$g_1(x, x'; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{ik(1-x')} \sin k(1-x); & x' \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{k} \sin k(1-x') e^{ik(1-x)}; & -\infty \leq x \leq x'. \end{cases} \quad (2.12)$$

Voltando à condição de compatibilidade, esta é estabelecida substituindo as funções de Green  $g_2(x < x')$  e  $g_1(x > x')$  na eq.(2.9)

$$\hat{g}(x', x''; k) = -\frac{1}{2ik} \left[ e^{ik(x''-x')} - e^{ik(x''-x'+2(1+a))} \right]. \quad (2.13)$$

Note-se que  $\hat{g}(x' x''; \lambda)$  pode ser interpretado como sendo resultado da interferência de duas funções de Green livres. A primeira expressa o movimento direto de  $x' \rightarrow x''$  e a segunda expressa também o movimento de  $x' \rightarrow x''$ , mas que antes no caminho bate e reflete sobre os extremos da caixa localizados nos pontos  $x = -a$  e  $x = 1$ . É este último o análogo ao movimento clássico de uma partícula, que se assemelha a um mapa de Poincaré.

Para calcular os autovalores fazemos com que  $x', x'' \rightarrow 0$  na condição para (2.13)

$$\hat{g}(0, 0, k) = -\frac{1}{2ik} \left[ 1 - e^{ik[2(1+a)]} \right]. \quad (2.14)$$

Os autovalores são aqueles  $\kappa$  que fazem com que  $\hat{g}(0, 0; \kappa)$  se anule e com isto :

$$\kappa = \frac{n\pi}{a+1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

## 2.2 Problema de Autovalores em Duas Dimensões

### 2.2.1 Partícula num Poço do tipo Retângulo

A partícula de massa unitária é confinada num poço do tipo retângulo de largura  $(a + 1)$  na direção  $x$  e comprimento 1 na direção  $y$ , fig.(2.1). Só serão de nosso interesse encontrar as soluções sujeitas às condições de Dirichlet nas bordas.

Considere-se a equação de Schrodinger em coordenadas cartesianas

$(\hbar^2 = 1)$ :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E \right] \Psi(x, y) = 0, \quad (2.15)$$

Dada a separabilidade da equação a solução acima pode-se escrever na forma

$\Psi(x, y) = \langle j|x \rangle \langle j|y \rangle$ , obtemos assim duas novas equações

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_y^2 \right] \langle j|y \rangle = 0, \quad (2.16)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2E - k_y^2) \right] \langle x|j \rangle = 0.$$

O conjunto de soluções nas suas respectivas variáveis é um conjunto ortogonal dois a dois com peso 1, por serem equações do tipo Sturm-Liouville (Apêndice A).

Pondo em prática o algoritmo descrito no capítulo 1, estabelece-se a seção de Poincaré quântica num plano paralelo ao eixo  $y$  exatamente no ponto  $x = 0$ , fig.(2.1). Dado que a equação de Schrodinger é separável, fixado um valor de energia, a função de Green pode-se decompor em modos próprios verticais :

$$G_j(x, x', y, y'; E) = \sum_m \langle y|j, m \rangle \langle m, j|y' \rangle g_{jm}(x, x'; k_m^2); \quad (2.17)$$

onde  $\langle y|j, m \rangle = \sqrt{2} \sin(my\pi)$ , para satisfazer a condição de borda em  $y = 0$  e  $y = 1$ . Enquanto as funções de Green  $g_{jm}(x, x'; k_m^2)$  poderão ser escolhidas como sendo as funções de Green complementares que satisfazem o problema de Dirichlet unidimensional(2.11)-(2.12)

$$g_{2m}(x, x''; k_m^2) = \frac{1}{k_m} e^{ik_m(x''+a)} \sin k_m(x+a); \quad -a \leq x \leq x'' \quad (2.18)$$



$$g_{1m}(x, x'; k_m^2) = \frac{1}{k_m} e^{ik_m(1-x')} \sin k_m(1-x); \quad x' \leq x \leq 1, \quad (2.19)$$

onde  $k_m = \sqrt{2E - m^2\pi^2}$ .

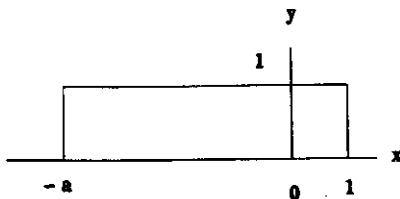


Figura 2.1: Bilhar retangular e a sua seção de Bogomolny estabelecida em  $x = 0$ .

Substituindo estas expressões na condição de compatibilidade

$$\begin{aligned} \hat{G}(y', y'', x', x''; E) &= \int_{\Sigma} dy [G_1(y, y', x, x'; E) \partial_x G_2(y, y'', x, x''; E) \\ &\quad - G_2(y, y'', x, x''; E) \partial_x G_1(y, y', x, x'; E)]_{x=0} \\ &= \sum_{mn} \left[ \int_0^1 dy \langle n, 1 | y \rangle \langle y | 2, m \rangle \right] \frac{1}{4i} e^{i(k_m x'' - k_n x')} \\ &\quad \langle y' | n, 1 \rangle \left\{ \left[ \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_m} \right] e^{2i(k_n + k_m a)} + \left[ \frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_m} \right] e^{2ik_n} \right. \\ &\quad \left. - \left[ \frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_m} \right] e^{2ik_m a} + \left[ \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_m} \right] \right\} \langle m, 2 | y'' \rangle \\ &= \sum_n \frac{1}{2ik_n} e^{ik_n(x'' - x')} \langle y' | n \rangle \{ e^{2ik_n(a+1)} - 1 \} \langle n | y'' \rangle. \end{aligned}$$

Aqui já temos substituído as respectivas funções de Green pelas suas representações em modos próprios, além de ter deixado explícito o valor da integral sobre a seção (entre colchetes)

$$\int_0^1 dy \langle m, 1 | y \rangle \langle y | 2, n \rangle = \delta_{mn}.$$

Expressando  $\hat{G}(x', x'', y', y''; E)$  na base seno, obtemos a matriz

$$\langle n | \hat{G} | n \rangle = \frac{1}{2ik_n} e^{ik_n(x''-x')} [e^{2ik_n(a+1)} - 1], \quad (2.20)$$

que fica sendo uma matriz diagonal. Os autovalores são encontrados fazendo  $x'$  e  $x'' \rightarrow 0$ .

Para calcular os  $k_n$  que zeram os elementos diagonais da matriz  $\langle n | \hat{G} | n \rangle$ , temos

$$\langle n | \hat{G} | n \rangle = 0 \rightarrow k_n = \frac{l\pi}{a+1} \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Lembrando-nos que

$$k_n^2 = 2E - n^2\pi^2; \quad n\pi \leq \sqrt{2E},$$

os autovalores obtidos resultam ser os conhecidos.

$$E_{nl} = \frac{1}{2} \{ n^2\pi^2 + \frac{l^2\pi^2}{(a+1)^2} \} \quad ; n, l \in \mathbb{Z}. \quad (2.21)$$

Voltando à expressão (2.20), vemos que quando  $m\pi > \sqrt{2E}$ ,  $G_{jm}$  descreve modos não oscilantes; para estes  $\det \hat{G}$  não se anula. Dito de outra forma, estes modos não afetam os zeros do determinante de Bogomolny.

Voltando ao problema das autofunções: Na seção, deve existir uma única densidade de camada  $\mu$

$$\int_0^1 \hat{G}(0, y, q''; E) \mu(y) dy = \int_0^1 dy \mu(y) \hat{G}(q', 0, y; E) = 0.$$

Representemos tanto  $\hat{G}$  quanto  $\mu$  na base, natural, das funções seno

$$\langle n, 1 | \hat{G} | 1, n \rangle = \langle n, 1 | \mu \rangle = \mathfrak{d}, \quad (2.22)$$

onde

$$\langle n, 1 | \mu \rangle = \mu_{1n} \propto \int_0^1 dy \langle y | 1, n \rangle \mu(y).$$

Esta última implica que temos restrito  $\mu$  a ser proporcional a  $\langle y | 1, n \rangle$ . Note-se que este conjunto de funções  $\langle y | 1, n \rangle$  formam uma base completa e portanto os coeficientes  $\mu_{1n}$

definição de maneira única  $\mu(y)$  e vice-versa. Re-escrevendo (2.22) na forma

$$\begin{aligned}\langle n | \hat{G} | n \rangle \mu_{1n} &= \frac{1}{2ik_n} \left[ e^{2ik_n(a+1)} - 1 \right] \mu_{1n} \\ &= \frac{1}{k_n} e^{ik_n(a+1)} \{ \sin [k_n(a+1)] \} \mu_{1n} \\ &\equiv \Pi_{nn} e^{ik_n} \mu_{1n} = 0.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Note que  $e^{ik_n} \mu_{1n}$  é sempre real. A matriz  $\Pi_{nn}$  é real e possui os mesmos autovalores que a matriz complexa  $\hat{G}$ . Para resolver a equação homogênea basta escolher  $\bar{\mu}_{1n} = e^{ik_n} \mu_{1n}$  um real não nulo. Agora já podemos escrever  $\Psi_{1E}$

$$\Psi_{1E}(x, y) = \int_0^1 dy' G_1(x, 0, y, y'; E) \mu(y'),$$

onde após substituída a expressão para  $G_1$  em modos próprios temos:

$$\begin{aligned}\Psi_{1E}(x, y) &= \langle \mu | 1, n \rangle \langle n | y \rangle g_1(x, 0; k_n^2) \\ &= \frac{1}{k_n} \bar{\mu}_{1n} \langle n | y \rangle \sin k_n(1-x); \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

A mesma análise pode ter sido feita para calcular a densidade na região (2). Ainda é preciso calcular o fator de proporcionalidade que suaviza a função de onda na seção. Para isso usamos a continuidade da função na seção

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_n} \bar{\mu}_{1n} \langle n | 1, n \rangle \sin k_n &= \frac{1}{k_m} e^{ik_m a} \mu_{2m} \langle y | 2, m \rangle \sin k_m a, \\ \frac{\bar{\mu}_{2m}}{\bar{\mu}_{1n}} &= \frac{e^{ik_m a} \mu_{2m}}{e^{ik_n a} \mu_{1n}} = \frac{\sin k_m}{\sin k_n}.\end{aligned}$$

Temos liberdade para escolher  $\bar{\mu}_1 = \sin k_m a$  e  $\bar{\mu}_2 = \sin k_m$  e com isto

$$\Psi_E(x, y) = \begin{cases} \langle m | y \rangle \frac{1}{k_m} \sin k_m a \sin k_m(1-x); & 0 \leq x \leq 1 \\ \langle m | y \rangle \frac{1}{k_m} \sin k_m \sin k_m(x+a); & -a \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

onde  $k_m^2 = (2E - m^2 \pi^2)$  e

$$E_{ml} = \frac{1}{2} \{ m^2 \pi^2 + \frac{l^2 \pi^2}{(a+1)^2} \}; \quad m, l \in \mathbb{Z}. \quad (2.25)$$

Pode-se verificar que a derivada na direção  $x$  também é contínua em  $x = 0$ , com o qual resolvemos o problema.

## 2.2.2 Partícula num Poço do tipo Seção Circular

A partícula de massa unitária é confinada num poço do tipo seção circular de raio 1 e setor angular  $(\alpha + \beta)$ , fig(2.2). Só será de nosso interesse encontrar as soluções restritas às condições de Dirichlet nas bordas.

Consideremos a equação de Schrodinger em coordenadas cilíndricas ( $\hbar^2 = 1$ ):

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + 2E \right] \Psi(r, \phi) = 0. \quad (2.26)$$

Dada a separabilidade das equações a solução acima pode escrever-se na forma

$\Psi(r, \phi) = \langle j|r \rangle \langle j|\phi \rangle$ . Com isto obtemos duas novas equações do tipo Sturm Liouville

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + 2Er - \frac{\nu^2}{r} \right] \langle r|j \rangle = 0, \quad (2.27)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \nu^2 \right] \langle \phi|j \rangle = 0.$$

O conjunto de soluções de cada equação é ortogonal, dois a dois. Para a primeira, na direção  $r$  o conjunto é ortogonal com peso  $\frac{1}{r}$ , enquanto que a segunda na variável  $\phi$  a função de peso é 1, para valores diferentes do parâmetro  $\nu$  (Apêndice A).

Estabelece-se a seção de Poincaré quântica sobre um segmento de raio de comprimento 1 paralelo a  $y$ , exatamente em  $x = 0$ ; fig.(2.2), onde o ângulo  $\phi$  é medido a partir do eixo  $y$ . Esta situação é bem diferente da discutida por Ozorio de Almeida[22], porque a seção de Bogomolny é agora o raio ao invés de um arco de círculo.

Pela separabilidade da equação de Schrodinger, a função de Green pode se decompor em modos próprios radiais para um dado valor de energia.

$$G_j(r, r', \phi, \phi'; E) = \sum_n \langle r|n, j \rangle \langle n, j|r' \rangle g_{jn}(\phi, \phi'; \nu_n^2), \quad (2.28)$$

onde  $\langle n, j|r \rangle \propto J_{\nu_n}(\kappa r)$  é uma função de Bessel de primeira espécie de ordem  $\nu_n$  e  $\kappa = \sqrt{2E}$ . Os modos são determinados pela condição

$$\langle n, j|r = 0 \rangle = 0, \quad \langle n, j|r = 1 \rangle = 0,$$

de modo a satisfazer as condições de borda em  $r = 0$  e  $r = 1$ . Evidentemente  $\nu_n$  é função da energia. Quanto às funções de Green  $g_{jn}(\phi, \phi'; \nu_n^2)$ , estas podem ser escolhidas como sendo as funções de Green complementares que satisfazem o problema de Dirichlet unidimensional(2.11)-(2.12)

$$g_{2n}(\phi, \phi'; \nu_n^2) = \frac{1}{\nu_n} e^{i\nu_n(\alpha + \phi'')} \sin \nu_n(\phi + \alpha) \quad -\alpha \leq \phi < \phi' \quad (2.29)$$

e

$$g_{1n}(\phi, \phi'; \nu_n^2) = \frac{1}{\nu_n} e^{i\nu_n(\beta - \phi')} \sin \nu_n(\beta - \phi) \quad \beta \geq \phi \geq \phi'. \quad (2.30)$$

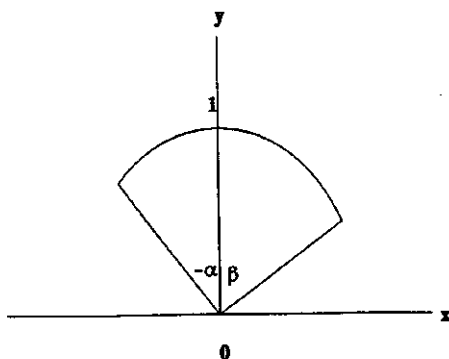


Figura 2.2: Bilhar do tipo seção circular e a sua seção de Bogomolny estabelecida em  $x = 0$ .

Substituímos estas expressões na condição de compatibilidade (1.6)

$$\begin{aligned}
 \hat{G}(r', r'', \phi', \phi''; E) &= \int_{\Sigma} dr [G_1(r, r', \phi, \phi'; E) \partial_r G_2(r, r'', \phi, \phi''; E) \\
 &\quad - G_2(r, r'', \phi, \phi''; E) \partial_r G_1(r, r', \phi, \phi'; E)]_{\phi=0} \\
 &= \sum_{nm} \left[ \int_0^1 \frac{dr}{r} \langle n, 1 | r \rangle \langle r | 2, m \rangle \right] \frac{1}{4i} e^{i(\nu_m \phi'' - \nu_n \phi')} \\
 &\quad \times \langle r' | 1, n \rangle \left\{ \left[ \frac{1}{\nu_n} + \frac{1}{\nu_m} \right] e^{2i(\nu_n \beta + \nu_m \alpha)} + \left[ \frac{1}{\nu_n} - \frac{1}{\nu_m} \right] e^{2i\nu_n \beta} \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{1}{\nu_n} - \frac{1}{\nu_m} \right] e^{2i\nu_m \alpha} - \left[ \frac{1}{\nu_n} + \frac{1}{\nu_m} \right] \right\} \langle m, 2 | r'' \rangle \\
 &= \frac{1}{2i\nu_n} e^{i\nu_n(\phi'' - \phi')} \langle r' | n \rangle \left[ e^{2i\nu_n(\alpha + \beta)} - 1 \right] \langle n | r'' \rangle
 \end{aligned}$$

Aqui substituímos as respectivas funções de Green por suas representações em modos próprios, além de ter deixado explícito o valor da integral sobre a seção de Bogomolny  $\Sigma$ , estabelecida em  $\phi = 0$ . Veja-se que esta integral é ( **Apêndice A** )

$$\int_0^1 \frac{dr}{r} \langle n, 1 | r \rangle \langle r | m, 2 \rangle = \delta_{mn}.$$

Projetando  $\hat{G}(r, r', \phi, \phi'; E)$  na base das funções de Bessel, obtemos a matriz diagonal

$$\langle n | \hat{G} | n \rangle = \frac{1}{2i\nu_n} e^{i\nu_n(\phi' - \phi'')} \times \left[ e^{2i\nu_n(\alpha + \beta)} - 1 \right]. \quad (2.31)$$

Os autovalores são calculados fazendo  $\phi', \phi'' \rightarrow 0$ , calculando os  $\nu_n$  que zeram os elementos da matriz  $\langle n | \hat{G} | n \rangle$ ,

$$\nu_n = \frac{l\pi}{\alpha + \beta}; \quad l \in \mathbb{Z}.$$

É interessante notar, que podemos estudar um conjunto de casos nos quais a seção circular não é necessariamente simétrica e que dependendo em  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\nu_n$  não precisa ser inteiro, podendo tornar qualquer número real.

Encontrados os  $\nu_n$ , determinamos o valor da autoenergia. Para isto voltamos às funções de Bessel e vejamos que no limite assintótico[28]

$$J_{\nu}(k) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \cos\left(\kappa - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right); \quad \nu \ll \kappa. \quad (2.32)$$

Analisando apenas a sua fase, encontramos os zeros que são dados por

$$\kappa_n - \nu_n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \approx (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad ; n \geq 1 \in \mathbb{Z},$$

e daí é simples ver que

$$\kappa_n \approx \{2n + \nu_n - \frac{1}{2}\} \frac{\pi}{2}.$$

Lembrando que  $\nu_n = \frac{i\pi}{\alpha+\beta}$ , os autovalores resultam ser aproximadamente

$$E_{nl} \approx \{n + \frac{i\pi}{2(\alpha+\beta)} - \frac{1}{4}\}^2 \frac{\pi}{2} \quad ; n, l \in \mathbb{Z}. \quad (2.33)$$

Considerando a expressão (2.31), verifica-se que esta não se anula quando a ordem é complexa pura. Este é o caso dos modos não oscilantes que também não afetam o determinante de Bogomolny.

Para calcular as autofunções, recorre-se ao argumento que restringia a existência de uma única densidade de camada na seção

$$\int_0^1 dy \mu(r) \hat{G}(q', r, 0; E) = \int_0^1 dy \hat{G}(\tau, 0, q''; E) \mu(r) = 0.$$

Representemos tanto  $\hat{G}$  quanto  $\mu$  na base, natural, das funções de Bessel de primeira espécie

$$\langle n, 1 | \hat{G} | 1, n \rangle \langle n, 1 | \mu \rangle = 0, \quad (2.34)$$

onde

$$\langle n, 1 | \mu \rangle = \mu_{1n} \propto \int_0^1 \frac{dr}{r} \langle n, 1 | r \rangle \mu(r).$$

Esta última expressão implica que temos restrito a densidade a ser proporcional a  $\langle r | 1, n \rangle$ . As funções de Bessel de primeira espécie formam uma base completa e portanto os coeficientes  $\mu_{1n}$  definem de maneira única  $\mu(r)$  e vice-versa. Reescrevendo (2.34)

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{G} | n \rangle \mu_{1n} &= \frac{1}{2i\nu_n} \left[ e^{2i\nu_n(\beta+\alpha)} - 1 \right] \mu_{1n} \\ &= \frac{1}{\nu_n} e^{i\nu_n(\beta+\alpha)} \{ \sin [\nu_n(\alpha + \beta)] \} \mu_{1n} \end{aligned}$$

$$\equiv \Pi_{nn} e^{i\nu_n \beta} \mu_{1n} = 0.$$

Resolvemos a equação homogênea escolhendo  $\bar{\mu}_{1n} = e^{i\nu_n\beta} \mu_{1n}$  um real não nulo. Note que a matriz real  $\Pi_{nn}$  possui os mesmos autovalores que a matriz complexa  $\hat{G}$ . Já podemos escrever  $\Psi_{1E}$  na forma

$$\begin{aligned}\Psi_{1E}(r, \phi) &= \langle r|1, n \rangle \langle n, 1|G_1|1, n \rangle \langle n, 1|\mu \rangle \\ &= \frac{1}{\nu_n} \bar{\mu}_{1n} \sin \nu_n(\beta - \phi) \quad ; 0 \leq \phi \leq \beta.\end{aligned}$$

Ainda é preciso calcular o fator de proporcionalidade que suaviza a função de onda na seção. Calcula-se este fator usando o argumento de continuidade da função na seção

$$\begin{aligned}\mu_{1n} \frac{1}{\nu_n} e^{i\nu_n\beta} \langle r|1, n \rangle \sin \nu_n\beta &= \mu_{2n} \frac{1}{\nu_m} e^{i\nu_m\alpha} \langle r|2, m \rangle \sin \nu_m\alpha, \\ \frac{\bar{\mu}_{1n}}{\bar{\mu}_{2n}} &= \frac{e^{i\nu_n\beta} \mu_{1n}}{e^{i\nu_m\alpha} \mu_{2n}} = \frac{\sin \nu_n\alpha}{\sin \nu_n\beta}.\end{aligned}$$

Escolhendo,  $\bar{\mu}_{1n} = \sin \nu_n\alpha$  e  $\bar{\mu}_{2n} = \sin \nu_n\beta$  as autofunções são escritas na forma

$$\Psi_E(r, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{\nu_n} \langle r|n \rangle \sin \nu_n\alpha \sin \nu_n(\beta - \phi); & 0 \leq \phi \leq \beta \\ \frac{1}{\nu_n} \langle r|n \rangle \sin \nu_n\beta \sin \nu_n(\alpha + \phi); & -\alpha \leq \phi \leq 0, \end{cases}$$

onde

$$\nu_n = \frac{l\pi}{\alpha + \beta} \quad ; l \in \mathbb{Z}.$$

Pode-se verificar que a derivada normal à seção também satisfaz a condição de continuidade em  $\phi = 0$ , com o qual resolvemos o problema.



# A Teoria de Bogomolny para o Estádio

# Capítulo 3

## I Teoria Quântica

Decompomos o quarto de estádio em um retângulo e um quarto de círculo dando origem a uma seção de Bogomolny natural; em cada uma destas regiões a equação de Helmholtz é separável. Contrariamente aos exemplos anteriores, o estádio como um todo não é separável, sendo nosso o primeiro tratamento quântico a usar essa separabilidade parcial. Assim construímos as funções de Green para ambas regiões e uma matriz de Bogomolny em uma mecânica quântica exata. Nestes mesmos termos, são discutidas as contribuições dos modos não oscilantes.

### 3.1 As Funções de Green-Bogomolny para o Estádio

O estádio dessimetrizado, ou quarto de estádio, pode ser decomposto em um retângulo e um quarto de circunferência. O segmento de reta que define esta separação natural será chamada de seção de Bogomolny  $\Sigma$ , fig.(3.1).

É importante notar que em cada uma destas regiões a equação de Helmholtz é separável. Como nos outros casos já abordados, estamos interessados em obter o conjunto de soluções que se anulam na borda. Ou seja, as soluções com simetria ímpar-ímpar, no que diz respeito às funções de onda do estádio completo.

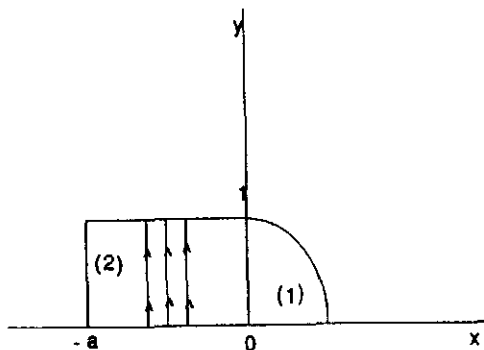


Figura 3.1: O quarto de estádio e a sua seção de Bogomolny definida em  $x = 0$ .

Seguindo Bogomolny[19], devemos construir as funções de Green  $G_1(q, q'; E)$  e  $G_2(q, q'; E)$  nas respectivas regiões da figura(3.1), satisfazendo a equação de Helmholtz não homogênea :

$$(2E - \nabla^2)G_j(q, q'; E) = \delta(q - q'),$$

onde  $q$  é a posição  $(x, y)$ . Além disto,  $G_1$  deverá satisfazer as mesmas condições de Dirichlet que as autofunções do quarto de estádio ao longo do raio horizontal e o quarto de círculo na fig.(3.1), enquanto que  $G_2$  deve se cancelar ao longo dos lados do retângulo, exceto na própria seção.

A separabilidade em ambas regiões nos permite explicitar as fórmulas para as funções de Green em termos da decomposição espectral de modos próprios, como foi feito por Ozorio de Almeida[22]. De fato, basta coletar as funções de Green já desenvolvidas na seção 2.2. A mais simples é a região (2), onde decompomos

$$G_2(q, q'; E) = \sum_m \langle y|2, m \rangle \langle m, 2|y' \rangle g_2(x, x'; k_m^2) \quad ; x \leq 0 \quad (3.1)$$

onde  $k_m^2 = 2E - m^2\pi^2$ ,

$$\langle m, 2|y \rangle = \langle y|2, m \rangle = \sqrt{2} \sin m\pi y$$

e escolhemos a função de Green para o movimento unidimensional na direção  $x$  a ser

$$g_2(x, x'; k_m^2) = \frac{1}{k_m} e^{ik_m(x'+a)} \sin k_m(x+a) \quad ; -a \leq x \leq x'. \quad (3.2)$$

Esta não é a única possibilidade para a função de Green que satisfaz as condições de borda na região (2), mas é aquela que Ozorio de Almeida mostrou ser uma das que impede os zeros espúrios na condição de quantização. Esta é obtida colocando a imagem da fonte em  $x'$  com respeito a  $x = -a$ , assim o movimento quântico corresponde a dois caminhos entre  $x'$  e  $x$ . Um é direto, enquanto que o outro caminho reflete em  $x = -a$ . Portanto este caso relaciona-se com o formalismo de Doron e Smilansky[21] e Prosen[20]: não há a possibilidade para o movimento retornar, uma vez que a região (2) é abandonada.

A hipótese de Bogomolny nos disse que podemos representar qualquer função de onda na região(2) como :

$$\psi_2(x, y) = \int_0^1 dy' \mu_2(y') G_2(x, y, 0, y'; E), \quad (3.3)$$

que reduz pela separabilidade a

$$\psi_2(x, y) = \sum_m \mu_{2m} g_2(x, 0; k_m^2) < m, 2|y >, \quad (3.4)$$

onde

$$\mu_{2m} = \int dy' \mu_2(y') < y'|2, m >. \quad (3.5)$$

Sendo que  $< y|2, m >$  forma uma base completa para o espaço de Hilbert de funções sobre a seção, esta representação(3.4) é sempre possível. \*

Podemos também separar a equação de Helmholtz na região(1), usando coordenadas polares:  $q = (r, \phi)$ , obtemos

$$\frac{d}{d\phi^2} F(\phi) + \nu^2 F(\phi) = 0, \quad (3.6)$$

que tem a mesma forma que a equação para  $x$  na região (2), e a equação de Bessel

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + 2Er - \frac{\nu^2}{r} \right\} < r|1 > = 0. \quad (3.7)$$

Esta situação é bem diferente da discutida por Ozorio de Almeida [22], porque a seção de Bogomolny é agora o raio, em vez do arco de círculo. Aqui os modos são determinados pela condição :  $\langle r = 0 | 1 \rangle = \langle r = 1 | 1 \rangle = 0$ , tal que

$$\langle n, 1 | r \rangle = \langle r | 1, n \rangle \propto J_{\nu_n}(\kappa r), \quad (3.8)$$

onde  $\kappa = \sqrt{2E}$  e a seqüência de números reais  $\nu_n$  é determinada pela equação

$$J_{\nu_n}(\kappa r)|_{r=1} = 0. \quad (3.9)$$

O inteiro  $n$  determina o número de nodos em  $\langle r | 1, n \rangle$ ; assim como  $m$  indica a quantidade de nodos em  $\langle y | 2, m \rangle$ .

Considerando que  $\kappa \gg \nu$ , podemos usar a aproximação[28]

$$J_{\nu}(\kappa r) \approx [\kappa r]^{-\frac{1}{2}} \cos \left\{ \kappa r - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right\}, \quad (3.10)$$

de maneira que para  $n \geq 1$  a condição (3.9) vem a ser

$$\nu_n = \frac{2}{\pi} \kappa + \frac{1}{2} - 2n. \quad (3.11)$$

Neste mesmo limite, quando  $E \gg n$  os modos  $\nu_n \approx \sqrt{2E}$ ; da mesma forma que  $k_m \approx \sqrt{2E}$  quando  $E \gg m$ . Enfatizamos que em outras situações a expressão acima precisa de dramáticas correções[29], como será mostrado numericamente no capítulo 4.

A função de Green para o movimento angular unidimensional pode-se escolher exatamente de forma análoga a (3.2),

$$g_1(\phi, \phi'; \nu_n^2) = \frac{1}{\nu_n} e^{i\nu_n(\frac{\pi}{2} - \phi')} \sin \nu_n(\frac{\pi}{2} - \phi) \quad ; \quad \phi' \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.12)$$

de maneira que a função de Green completa na região (1) vem a ser

$$G_1(q, q'; E) = \sum_n g_1(\phi, \phi'; \nu_n^2) \langle r | 1, n \rangle \langle n, 1 | r' \rangle. \quad (3.13)$$

Portanto  $G_1$  é diagonal na representação da base de Bessel  $|1, n \rangle$ , assim como  $G_2$  é diagonal na representação de Fourier-seno  $|2, m \rangle$ . Podemos também usar  $\langle r | 1, n \rangle$  como uma base ortonormal do espaço de Hilbert definida na seção, por serem soluções

do problema de Sturm-Liouville com condições de Dirichlet. Assim, podemos decompor qualquer densidade

$$\mu_1(r) = \sum_n \mu_{1n} \frac{1}{r} < n, 1 | r >, \quad (3.14)$$

para obter toda função de onda na região (1) na forma

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \phi) &= \int_0^1 dr' \mu_1(r') G_1(r, \phi, r', 0; E) \\ &= \sum_n \mu_{1n} g_1(\phi, 0; \nu_n^2) < n, 1 | r >. \end{aligned} \quad (3.15)$$

As funções de onda  $\psi_1(r, \phi)$  e  $\psi_2(x, y)$ , definidas pelas equações (3.4)-(3.15), satisfazem a equação de Helmholtz e as condições de borda nas suas respectivas regiões. A condição para que elas possam casar ao longo da seção, junto com as suas derivadas normais, é que exista uma única densidade na seção  $\mu(y) = \mu_2(y) = \mu_1(r)|_{r=y}$ , de modo que

$$\int_0^1 dy \mu(y) \hat{G}(0, y, q''; E) = \int_0^1 dr \hat{G}(q', r, 0; E) \mu(r) = 0 \quad (3.16)$$

onde :

$$\begin{aligned} \hat{G}(Q'', Q'; E) &= \int_0^1 dy \{ G_1(r, 0, r', \phi'; E) |_{r=y} \partial_x G_2(x'', y'', 0, y; E) \\ &\quad - G_2(x'', y'', 0, y; E) (\frac{1}{r} \partial_\phi G_1(r, 0, r', \phi'; E)) |_{r=y} \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Seguindo Bogomolny[19] ou Ozorio de Almeida[22], expandimos  $G_1$  na base  $< r | 1, n >$  e  $G_2$  na base  $< y | 2, m >$ , para obter :

$$\begin{aligned} \hat{G}(q', q''; E) &= \sum_{nm} \{ g_1(0, \phi'; \nu_n^2) \partial_x g_2(x'', 0; k_m^2) \int dy < m, 2 | y > < y | 1, n > \\ &\quad - g_2(x'', 0; k_m^2) \partial_\phi g_1(0, \phi'; \nu_n^2) \int \frac{dy}{y} < m, 2 | y > < y | 1, n > \} \\ &\quad \times < y'' | 2, m > < n, 1 | y' >. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aqui podemos reconhecer imediatamente os elementos de matriz que mudam as bases.

A matriz  $\langle 2|1 \rangle$ , com elementos

$$\langle m, 2|1, n \rangle = \int_0^1 \frac{dy}{y} \langle m, 2|y \rangle \langle y|1, n \rangle, \quad (3.19)$$

que não é nem unitária nem ortogonal, porque esta transforma autofunções do operador de Sturm-Liouville com diferentes funções de peso[26],

$$\langle m, 2|y \rangle = \sum_n \langle m, 2|1, n \rangle \langle n, 1|y \rangle. \quad (3.20)$$

Já que ambos conjuntos de funções são reais, poderemos sempre usar  $\langle 2|1 \rangle$  ou  $\langle 1|2 \rangle$  para decompor os senos em funções de Bessel.

$$\langle y|2, m \rangle = \sum_n \langle y|1, n \rangle \langle n, 1|2, m \rangle \quad (3.21)$$

representa a mesma expressão que (3.20).

A expansão inversa,

$$\langle n, 1|y \rangle = \sum_m \langle n, 1|2, m \rangle^{-1} \langle m, 2|y \rangle \quad (3.22)$$

é dada pela matriz inversa  $\langle 1|2 \rangle^{-1} = \langle 2|1 \rangle^{-1}$ , onde :

$$\langle 1|2 \rangle_{nm}^{-1} = \langle n, 1|2, m \rangle^{-1} = \int dy \langle n, 1|y \rangle \langle y|2, m \rangle. \quad (3.23)$$

Levando  $q''$  e  $q'$  na seção, obtemos :

$$\hat{G}(0, y'', 0, r'; E) = \sum_{nm} \langle y''|2, m \rangle \langle m, 2|\hat{G}|1, n \rangle \langle n, 1|y' \rangle, \quad (3.24)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle m, 2|\hat{G}|1, n \rangle &= \partial_x g_2(0, 0; k_m^2) \langle m, 2|1, n \rangle^{-1} g_1(0, 0; \nu_n^2) \\ &\quad - g_2(0, 0; k_m^2) \langle m, 2|1, n \rangle \partial_\phi g_1(0, 0; \nu_n^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim a equação de compatibilidade para a equação (3.16) é

$$\sum_m \langle \mu|2, m \rangle \langle m, 2|\hat{G}|1, n \rangle = \sum_n \langle m, 2|\hat{G}|1, n \rangle \langle n, 1|\mu \rangle = 0. \quad (3.26)$$

A condição sobre o determinante de Bogomolny é

$$\det < m, 2|\hat{G}|1, n > = 0, \quad (3.27)$$

donde é derivada, facilmente, a condição de autovalores em termos da matriz real,

$$\Pi_{mn}(E) = e^{-ik_m a} < m, 2|\hat{G}|1, n > e^{-i\nu_n \frac{\pi}{2}}, \quad (3.28)$$

$$\det \Pi = \det \left\{ \cos k_m a < m, 2|1, n >^{-1} \frac{\sin \frac{\nu_n \pi}{2}}{\nu_n} + \frac{\sin k_m a}{k_m} < m, 2|1, n > \cos \frac{\nu_n \pi}{2} \right\}. \quad (3.29)$$

Desta maneira os autovalores são obtidos como os zeros de uma função real. Aqui vemos, que nesta expressão formal o preço de usar bases separáveis em cada lado da seção é que vem a ser necessário usar explicitamente os elementos de matriz não unitárias entre as bases de Fourier-seno e a base de Bessel. Mesmo assim, mostraremos mais adiante que (3.29) proporciona um eficiente método para calcular autovalores e autofunções. Mas antes disso, discutiremos o truncamento da matriz  $\Pi(E)$ , que dependerá da construção dos modos não oscilantes.

## 3.2 Os Modos Não Oscilantes

### 3.2.1 Modos não oscilantes na região (2)

O uso dos modos  $< m, 2|y >$  como uma base para representar uma função quadrado integrável arbitrária sobre a seção com condições de Dirichlet não prevê restrição nenhuma sobre o inteiro  $m$ . Portanto o número de ondas transversal virá a ser imaginário puro quando  $m \geq \frac{\sqrt{2E}}{\pi}$ , isto é, os modos correspondentes serão da forma 'sinh  $|k_m|(x+a)$ ', uma superposição de modos que crescem e outros que decrescem exponencialmente em torno da seção. Estes últimos, também conhecidos como modos evanescentes, são a única classe permitida em um tubo semi-infinito, isto porque a amplitude deve permanecer sempre finita. Por esta mesma razão, a influência destes modos não oscilantes deverá decrescer rapidamente com  $m$  dentro da região finita para a qual definimos a função de Green  $G_2$ .



No caso de sistemas completamente separáveis, foi mostrado por Ozorio de Almeida[22], que estes modos não oscilantes não afetam os zeros do determinante de Bogomolny. Na verdade, a matriz  $\hat{G}$  fica sendo diagonal, é por isto que os autovalores são obtidos cancelando os elementos de matriz individuais. Os modos no estádio estão fortemente acoplados, é por isto que não podemos a princípio ignorar estes modos que não oscilam, mesmo que estes não contribuam no limite semiclássico.

Podemos ainda fazer uma avaliação aproximada da grandeza do acoplamento destes modos não oscilantes na região (2) com os modos oscilantes da região (1) combinando as aproximações (3.10)-(3.11)

$$J_{\nu_n}(\kappa r) \approx \begin{cases} [\kappa r]^{-\frac{1}{2}} \cos[\kappa(r-1) + n\pi - \frac{\pi}{2}] & ; \kappa r > \nu_n \\ 0 & ; \kappa r < \nu_n, \end{cases} \quad (3.30)$$

para  $n \geq 1$ . Portanto, os elementos de matriz entre as bases de Fourier e Bessel são aproximadamente :

$$\langle n, 1 | 1, m \rangle^{-1} \approx \int_{\frac{\nu_n}{\pi}}^1 \frac{dy}{(\pi \kappa y)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \sin[(m\pi - \kappa)y + \kappa - n\pi + \frac{\pi}{2}] \right. \\ \left. + \sin[(m\pi + \kappa)y - \kappa + n\pi - \frac{\pi}{2}] \right\} \quad (3.31)$$

e a sua contribuição máxima acontece quando  $\kappa = \sqrt{2E} = m\pi$ , cancelando as oscilações na primeira integral:

$$\langle n, 1 | 2, m \rangle_{max}^{-1} \approx \frac{2(-1)^{m-n}}{\pi \sqrt{m}} \left\{ 1 - \left[ \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{n - \frac{1}{4}}{m} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (3.32)$$

um cálculo similar nos conduz a :

$$\langle m, 2 | 1, n \rangle_{max} \approx \frac{-2(-1)^{m-n}}{\pi \sqrt{m}} \left\{ 1 - \left[ \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{n - \frac{1}{4}}{m} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.33)$$

O segundo termo em(3.31) decai mais rapidamente do que (3.32) por um fator da ordem  $(m\pi + \kappa)^{-1}$ , enquanto que o termo principal cresce com  $(m\pi - \kappa)^{-1}$  com respeito a (3.32) ou (3.33)(Apêndice B).

Assim encontramos que os elementos de matriz, em valor, são insensíveis ao índice  $n$  na representação de Bessel, mas que há um máximo para  $m = \frac{\sqrt{2E}}{\pi}$ . Surpreendentemente este é exatamente o ponto que separa os modos oscilantes dos modos exponenciais. Já que  $m$  deve ser um inteiro, encontramos que o acoplamento mais forte deve-se alternar em energia entre o maior modo oscilante e o menor modo não oscilante. Como pode ser verificado numericamente, raramente os modos não oscilantes afetam fortemente o valor das autoenergias, mas estes sempre contribuirão componentes importantes da função de onda na região(2).

Resulta simples encontrar a função de Green que inclui os modos não oscilantes na região (2). Para isto consideremos a equação (3.1) que representa  $G_2$  em modos próprios nas coordenadas retangulares

$$G_2(q, q''; E) = \sum_{m > \frac{\sqrt{2E}}{\pi}} \langle y|2m \rangle \langle 2m|y' \rangle g_2(x, x'; |k_m|^2), \quad (3.34)$$

onde

$$\langle y|2m \rangle = \sqrt{2} \sin m\pi y.$$

Definindo  $|k_m|^2 = m^2\pi^2 - 2E \geq 0$ ,

$$g_2(x, x'; |k_m|^2) = \frac{1}{|k_m|} e^{-|k_m|a} \sinh |k_m|(x+a). \quad (3.35)$$

Aqui se vê claramente que estes são modos que moram em torno da seção  $x=0$ .

### 3.2.2 Modos não oscilantes na região (1)

Há também uma base de dimensão infinita na representação das funções de Bessel definidas sobre a seção, mas também há uma curiosa anomalia envolvendo a natureza dos modos não oscilantes neste caso. Para entender o problema é melhor considerar o quarto de estádio como sendo o limite de uma família de bilhares, como na figura(3.2), isto é, substituímos o quarto de círculo na região(1) por um quarto de anel de raio interior  $\rho$  e raio exterior  $(1+\rho)$ . A condição de Dirichlet sobre a equação de Bessel leva-nos à seguinte sequência de soluções

$$\langle r|1, n \rangle = a_n J_{\nu_n}(\kappa r) + b_n Y_{\nu_n}(\kappa r), \quad (3.36)$$

onde  $Y_{\nu_n}$  são as funções de Neumann singulares na origem para  $\kappa$  real. Se  $\rho \rightarrow 0$  então  $b_n \rightarrow 0$ .

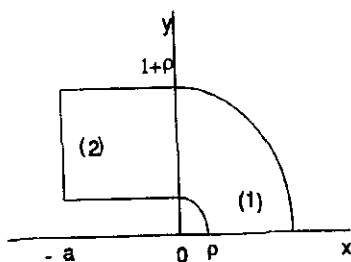


Figura 3.2: Família de estádios

Da mesma forma que antes,  $n$  especifica o número de modos em  $\langle r|1, n \rangle$ , mas, já que  $\nu_n$  decresce com  $n$ , há um máximo  $n$  para o qual  $\nu$  permanece real. Para obter os modos restantes,  $\nu_n$  deve se tornar imaginário puro, isto nos conduz a modos não oscilantes na direção transversal angular. Ambas,  $J_\nu(\kappa r)$  e  $Y_\nu(\kappa r)$  oscilam rápida e infinitamente próximo de  $r \rightarrow 0$ , quando  $\nu$  é imaginário puro. Incrementando o módulo de  $\nu$  podemos encontrar tantos modos como queiramos na vizinhança da origem no intervalo  $\rho$  e  $(1 + \rho)$ . A sequência de  $\nu_n$  está bem mais próxima da origem conforme  $\rho$  é diminuída, tal que no limite quando  $\rho \rightarrow 0$  uma infinita sequência de  $\nu_n$  imaginários puros acumula em  $\nu = 0$ .

Para bilhares como na figura(3.2) com algum raio finito  $\rho$ , podemos adicionar qualquer número de modos não oscilantes para representar a função de onda na região(1), assim como na região(2). Este número deve ser truncado, uma vez que a convergência numérica de  $\hat{G}$  é alcançada, porque adicionando mais filas com elementos de matriz bem pequenos causará que o determinante eventualmente seja instável numericamente. Este truncamento será essencial na região (1) quando  $\rho \rightarrow 0$ , ou seja, o quarto de estádio. Neste caso podemos tomar um modo não oscilante no quarto de círculo, precisamente  $\nu = 0$ , para qualquer valor de  $\kappa$ . Este modo terá a forma (3.36) com  $a_n$  e  $b_n$  escolhido de forma a ser satisfeita a condição de Dirchlet em  $r = 1$ . Mesmo que

$Y_0(\kappa r)$  diverge na origem, toda as integrais na teoria estão bem definidas. Desta forma colocamos um limite na dimensão do determinante, isto faz com que sempre encontremos, pelo menos, um modo não oscilante na região (2) como para completar a matriz quadrada  $< m|\hat{G}|n >$ .

É interessante notar que este bilhar da fig(3.2) é bem similar ao sistema recentemente estudado por Lin e Jaffe[30]. Eles dão também uma consideração especial aos modos não oscilantes, mas o seu problema é incluir modos exponencialmente crescentes em tubos abertos.

Vejamos como estas considerações podem ser explicitados matematicamente. Para isto seguimos a notação de Berry e Ozorio de Almeida [31] ,

$$J_\nu(\kappa r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \Psi_\nu(r),$$

onde  $\Psi_\nu$  é solução da equação

$$\frac{d^2}{dr^2} + \left[ \kappa^2 - \frac{1}{r^2}(\nu^2 - \frac{1}{4}) \right] = 0, \quad (3.37)$$

com  $\kappa = \sqrt{2E}$ . Note-se que a condição em  $r = \rho$  não exclue esta outra solução

$$Y_\nu(\kappa r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \Psi_\nu(r),$$

que é excluída só na origem. Portanto, uma solução geral pode-se escrever assim

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \Psi_\nu(r) = a_n J_\nu(\kappa r) + b_n Y_\nu(\kappa r). \quad (3.38)$$

Fixado  $\rho$ , teremos uma série de autovalores reais  $\nu_n$  sujeitando as soluções ao problema de contorno. No limite  $\rho \rightarrow 0$  , obtemos  $b_n \rightarrow 0$  para todas essas autofunções.

Por outro lado, em vez das autofunções  $J_\nu$  e  $Y_\nu$  poderíamos usar  $H_\nu^1$  e  $H_\nu^2$  como funções independentes. Estas tem a vantagem de ter formas assintóticas mais parecidas com as soluções WKB

$$H_\nu^{1,2}(r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \exp\{\pm i(r - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\},$$

enquanto que as soluções WKB tem a forma

$$\Psi_\nu^\pm(r) \approx \frac{1}{Q(r)} \exp\{\pm i \int dr Q(r)\}, \quad (3.39)$$

onde

$$Q(r) = \sqrt{\kappa^2 - \frac{\nu^2}{r^2}}.$$

Note-se que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_{\nu}^{\pm}(r) \propto \exp\{\pm i\kappa r\}. \quad (3.40)$$

Evidentemente,  $\sqrt{r}H_{\nu}^{1,2}(r)$  e  $\Psi_{\nu}^{\pm}(r)$  se tornam assintoticamente proporcionais no limite em que  $r \rightarrow \infty$ .

Voltando à equação (3.37), o termo  $\frac{1}{r^2}(\nu^2 - \frac{1}{4})$ , pode ser considerado como um potencial repulsivo de um sistema unidimensional, isto quando  $\nu$  é real. Por pequeno que seja  $\nu^2 - \frac{1}{4}$ , haverá um ponto de retorno para  $r > 0$ , fig.(3.3). Neste ponto a aproximação WKB explode, embora ela se aproxima dele melhor do que as formas assintóticas das funções de Hankel[31]. Além do ponto de retorno as soluções WKB deixam de ser oscilatorias e passa-se a ter

$$\Psi_{\nu}^{\pm}(r) \approx \frac{1}{\sqrt{|Q_{\nu}(r)|}} \exp\{\pm \int |Q_{\nu}(r)| dr\}.$$

A que decai na origem ( $\Psi^+$ ) aproxima-se à função de Bessel de primeira espécie  $J_{\nu}(r)$  e a que cresce ( $\Psi^-$ ) aproxima-se à função de Bessel de segunda espécie  $Y_{\nu}(r)$ .

Note-se que quando a ordem passa a ser um imaginário puro, o potencial se torna atrativo e as duas soluções oscilam infinitamente rápido na origem, fig.(3.3). Aí vemos que está correta a correção  $\nu^2 - \frac{1}{4} \rightarrow \nu^2$  em Berry e Ozorio de Almeida[31], pois a transição se dá para  $\nu = 0$  e não para  $\nu = \frac{1}{2}$ . O que esta correção não pode dar é a divergência logarítmica de  $Y_0$  na origem.

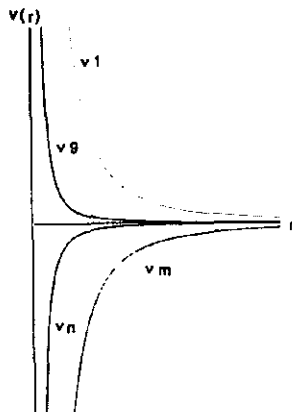


Figura 3.3: Potencial repulsivo ( $\nu$  é real) e potencial atrativo ( $\nu$  é complexo).

Para a ordem imaginária pura a aproximação WKB não tem mais que enfrentar o ponto de retorno, então podemos usá-la livremente. Note que a dependência de  $H_\nu$  com  $\nu$  deixa de alterar a sua fase quando a ordem é imaginária pura, tornando-se meramente um fator real multiplicativo. Isto é porque o número infinito de oscilações na origem torna a fase na origem indeterminada. Vamos então tomar para a ordem imaginária

$$Q(r) = \sqrt{\kappa^2 + \frac{|\nu|^2}{r^2}},$$

$$\Psi_\nu^\pm(r) \approx \frac{1}{Q(r)} \exp\{\pm i \int_\rho^r dr Q(r)\}.$$

Temos que satisfazer as duas condições de Dirichlet em  $\rho$  e  $(1 + \rho)$ . Tomando

$$\phi_\nu(r) = \int_\rho^r dr Q(r),$$

e

$$\Psi_\nu^\pm(r) \approx \frac{1}{Q(r)} \exp\{\pm i \phi_\nu(r)\}.$$

Satisfazemos as condições de contorno em  $\rho$  com a solução

$$\Psi_\nu(r) = \frac{1}{Q(r)} \sin \phi_\nu(r).$$

A condição em  $r = (1 + \rho)$  será satisfeita se

$$\phi_{\nu_n}(1 + \rho) = \mathcal{F}(E, |\nu_n|^2, \rho) = \int_{\rho}^{1+\rho} dr Q(r) = n\pi. \quad (3.41)$$

Fixo  $\rho$ ,  $\mathcal{F}$  fornecerá implicitamente a função  $\nu_n^2(E)$ . Vejamos como é que esta função depende do parâmetro  $\rho$ , para um  $n$  fixo.

$$\frac{\partial}{\partial |\nu|^2} \mathcal{F}|_{E, \rho} d|\nu|^2 + \frac{\partial}{\partial E} \mathcal{F}|_{\nu, \rho} dE = 0,$$

ou seja

$$\frac{d|\nu|^2}{dE} = - \frac{\partial_E \mathcal{F}}{\partial_{|\nu|^2} \mathcal{F}},$$

onde

$$\frac{d|\nu|^2}{dE} = - \frac{\int_{\rho}^{1+\rho} dr Q^{-1}}{\int_{\rho}^{1+\rho} \frac{1}{r^2} Q^{-1}}.$$

Ambas essas integrais são singulares no limite  $\rho \rightarrow 0$ , portanto

$$\frac{d|\nu|^2}{dE} = \lim_{\rho \rightarrow 0} - \frac{-\frac{1}{Q}}{-\frac{1}{Q} \frac{1}{\rho^2}} = -\rho^2 \rightarrow 0.$$

Acontece que para um  $\rho$  muito pequeno e um dado  $E$ , temos  $n$  modos reais com  $\nu_n(E) > 0$ .

Tornando agora a ordem imaginária pura mesmo de módulo muito pequeno, já temos o modo  $n + 1$ , por causa da divergência na origem do potencial atrativo centrípeto. Com acréscimos muito pequenos:  $\nu \rightarrow (\nu + \delta\nu), (\nu + 2\delta\nu), \dots$ ; já teremos os modos:  $(n + 1), (n + 2), \dots$ ; se acumulando todos em  $\nu \rightarrow 0$ , fig.(3.4).

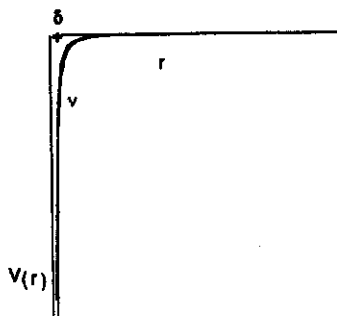


Figura 3.4: Os modos quando a ordem é complexa

Em conclusão: Para  $\rho \neq 0$  os modos não são apenas  $J_\nu(r)$  temos que considerar  $Y_\nu(r)$ , mas no limite  $\rho \rightarrow 0$  esperamos  $\frac{1}{\sqrt{r}}\Psi_{|\nu|}(r)$ . Entretanto, como  $\frac{1}{\sqrt{r}}\Psi_{|\nu|}(r)$  é suave em relação a  $\nu$ , podemos tomar um único modo  $\frac{1}{\sqrt{r}}\Psi_{|\nu|}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}\Psi_0(r)$ , entendendo-se que há um limite envolvido.

Agora resulta simples encontrar a função de Green que inclui os modos não oscilantes na região (1). Considere-se a eq.(3.13) que representa  $G_1$  em modos próprios nas coordenadas  $r, \phi$

$$G_1(q, q'; E) = \langle r|1, 0 \rangle \langle 0, 1|r \rangle g_1(\phi, \phi'; 0) \quad (3.42)$$

onde segundo (3.12)

$$\begin{aligned} g_1(\phi, \phi'; 0) &= \lim_{\nu_n \rightarrow 0} \frac{1}{\nu_n} e^{i\nu_n(\frac{\pi}{2} - \phi')} \sin \nu_n(\frac{\pi}{2} - \phi) \\ &= \frac{\pi}{2} - \phi, \end{aligned} \quad (3.43)$$

enquanto que a parte radial, escreve-se

$$\langle r|1, 0 \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \Psi_0(r) = a_0 J_0(\kappa r) + b_0 Y_0(\kappa r).$$

Para satisfazer as condições de Dirichlet em  $r = 1$ , escolhemos as constantes  $a_0 = Y_0(\kappa)$ ;  $b_0 = -J_0(\kappa)$ , de modo que

$$\langle r|1, 0 \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \Psi_0(r) = Y_0(\kappa) J_0(\kappa r) - J_0(\kappa) Y_0(\kappa r). \quad (3.44)$$

### 3.3 A Densidade de Camada

Temos discutido por inteiro o problema de calcular os autovalores, restando calcular as autofunções respectivas. Este problema se reduz a calcular a densidade de camada na seção. Para isto, Voltemos à expressão de compatibilidade das duas soluções na seção (3.16),

$$\int_0^1 dy \hat{G}(q', r, 0; E) \mu(y) = 0. \quad (3.45)$$



Podemos escolher qualquer uma das bases ortogonais para representar a densidade. Preferimos usar  $|1, n\rangle$ , assim (3.27) reescreve-se como

$$\sum_n \langle m, 2|\hat{G}|1, n\rangle \langle n, 1|\mu\rangle = 0. \quad (3.46)$$

O estágio dessimetrizado possui autovalores não degenerados, portanto as suas respectivas auto-funções deverão ser todas reais, porque a possibilidade de ter autofunções complexas conduz a que a sua complexa conjugada seja também uma autofunção, contradizendo a hipótese inicial.

É simples mostrar que  $\bar{\mu}_n = \mu_n e^{i\nu_n \frac{\pi}{2}}$  é sempre real, para isto voltemos à expressão de compatibilidade (3.45)

$$\begin{aligned} \sum_n \langle m, 2|\hat{G}|1, n\rangle \langle n, 1|\mu\rangle &= \sum_n e^{ik_m a} \Pi_{mn} e^{i\nu_n \frac{\pi}{2}} \langle n, 1|\mu\rangle \\ &\equiv \sum_n \Pi_{mn} e^{i\nu_n \frac{\pi}{2}} \langle n, 1|\mu\rangle \\ &= \sum_n \Pi_{mn} \bar{\mu}_n = 0, \end{aligned} \quad (3.47)$$

sendo que a matriz  $\Pi$  é real (3.29).

Resolvendo a equação homogênea (3.47) obtemos os corretos  $\bar{\mu}_n = \mu_n e^{i\nu_n \frac{\pi}{2}}$ . Devemos notar que a forma simples de se fazer este cálculo numericamente consiste em decompor a matriz  $\Pi$  na forma LU [32], onde  $L$  é uma matriz triangular inferior e  $U$  uma matriz triangular superior.

Aqui é importante mencionar que as integrais que normalizam os modos próprios na região (1) são

$$\int_0^1 \langle n, 1|r\rangle^2 \frac{1}{r} dr.$$

Todas são bem definidas a menos da correspondente com o modo  $\langle 0, 1|r\rangle$ . Este último modo é uma combinação de  $J_0$  e  $Y_0$  e portanto cresce infinitamente perto da origem. Assim mesmo, a integral sobre  $\frac{1}{r} J_0^2(r)$  tem uma divergência logarítmica (no limite  $\rho \rightarrow 0$ ). Este fato interessante faz com que, para a expansão de qualquer  $\mu(r)$  finita, em que  $\mu(0) = 0$ , o componente  $\mu_0 \rightarrow 0$ . Em conclusão, o modo  $\langle 0, 1|r\rangle$  nos ajudou a acertar a convergência

dos nossos autovalores, mas prescindimos dele quando descrevemos a função de onda na região (1).

Podemos calcular  $\langle m, 2 | \mu \rangle$  com as corretas constantes de proporcionalidade, usando a condição de continuidade da função de onda, ou da sua derivada normal na própria seção. Preferimos usar esta última

$$-\sum_n \frac{1}{r} \langle r | 1, n \rangle \bar{\mu}_n \cos \nu_n \frac{\pi}{2} = \sum_m \langle y | 2, m \rangle \langle m, 2 | \mu \rangle e^{ik_m a} \cos k_m a, \quad (3.48)$$

donde

$$\bar{\mu}_{2m} = \mu_{2m} e^{ik_m a} = - \frac{\sum_n \langle m, 2 | 1, n \rangle \bar{\mu}_{1n} \cos \nu_n \frac{\pi}{2}}{\cos k_m a}. \quad (3.49)$$

Assim, obtemos  $\Psi_E$  real,

$$\Psi_E = \begin{cases} \sum_m \bar{\mu}_m \langle y | 2, m \rangle \frac{\sin k_m (x+a)}{k_m} & ; -a \leq x \leq 0 \\ \sum_n \bar{\mu}_n \langle y | 1, n \rangle \frac{\sin \nu_n (\frac{\pi}{2} - \phi)}{\nu_n} & ; 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (3.50)$$

Finalmente temos resolvido o problema de calcular tanto os autovalores quanto as autofunções para o estádio, segundo a teoria quântica da seção de Bogomolny. O único ponto problemático da teoria consiste na necessidade de truncamento finito da matriz  $\Pi$ . Sabemos que o resultado não pode ser exato, pois obtemos autofunções analíticas dos dois lados da seção  $\Sigma$ , enquanto sabemos que as verdadeiras soluções não podem ser analíticas na vizinhança do ponto de borda onde o círculo e o segmento de reta se tocam na extremidade de  $\Sigma$ . Mesmo assim, mostraremos que a maneira pela qual o nosso método respeita a geometria do estádio se reflete na sua notável eficiência numérica.

### 3.4 Resultados Numéricos

O cálculo das autoenergias para o quarto de estádio a partir do determinante da matriz real (3.29), cuja dimensão é determinada pelo número de modos reais  $\nu_n$  mais o modo  $\nu_0$ , resulta ser eficiente e preciso. Na fig (3.5) exibimos a densidade cumulativa de estados para o estádio, com parâmetro  $a = 1$ , e o seu desvio com relação à densidade suavizada média incluindo o termo de Weyl além das correções revisadas em Baltes e Hilf[33]. O efeito no espectro devido à exclusão dos modos evanescentes da matriz de Bogomolny é mostrada na fig(3.6). Aqui encontramos que o desvio é sempre menor do que metade do espaçamento médio de níveis, por isso podemos assumir que os autovalores basicamente tem convergido apesar da pequena dimensão das matrizes usadas, como é mostrado na fig(3.7).

Na fig(3.8) comparamos o nosso espectro com os resultados bem precisos calculados por Vergini e Saraceno[34], usando superposição de ondas planas e ondas não oscilantes. Este desvio está dentro de um terço do espaçamento médio de níveis. É importante resgatar que em ambos métodos a avaliação intrínseca da precisão é bastante diferente. Como em muitos outros casos, Vergini verifica que a intensidade da função de onda na borda é próxima suficiente da condição de Dirichlet. Isto é automaticamente satisfeito pelo método de Bogomolny, ao passo que a dificuldade está agora com a suavidade do casamento da função de onda obtida como expansões de (3.4) e (3.15) ao longo da seção, como se mostra na fig (3.9). Finalmente, a fig(3.10) exhibe dois exemplos do Wronskiano

$$w(y) = \left| \psi_1(y, 0) \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(0, y) - \psi_2(0, y) \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_1(y, 0) \right|, \quad (3.51)$$

enquanto que a integral de  $w(y)$  sobre a seção é mostrada na fig.(3.11). Resgata-se que em todos os casos a função de onda foi previamente normalizada ao longo da seção, isso é

$$\int_0^1 |\psi_1(y, 0)|^2 dy = \int_0^1 |\psi_2(0, y)|^2 dy = 1. \quad (3.52)$$

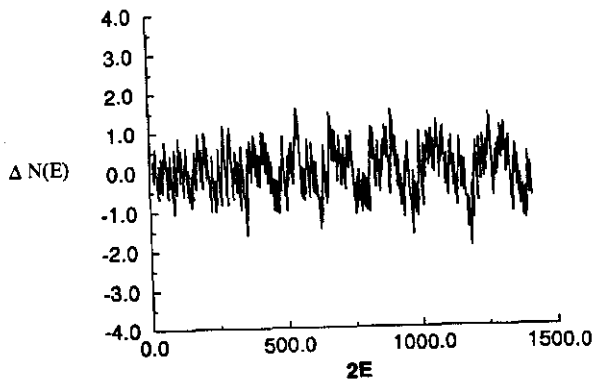
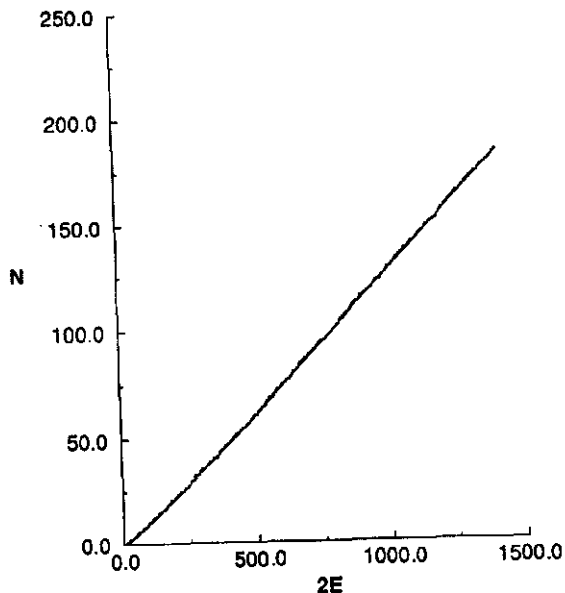


Figura 3.5: A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com  $a = 1$ .

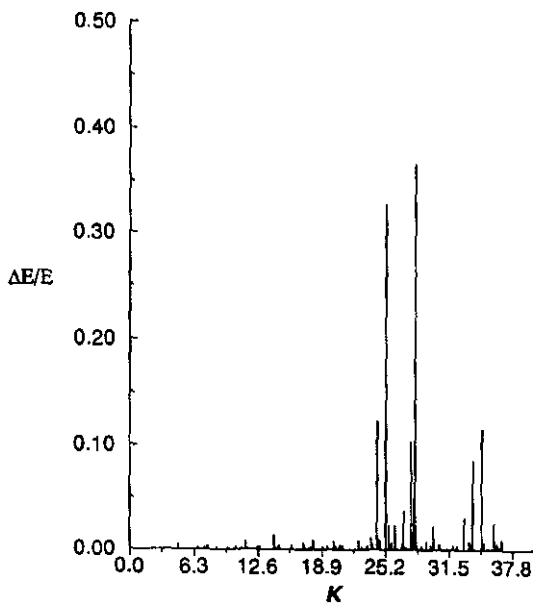


Figura 3.6: Efeito no espectro da exclusão dos modos não oscilantes como função do número de onda  $\kappa$ .

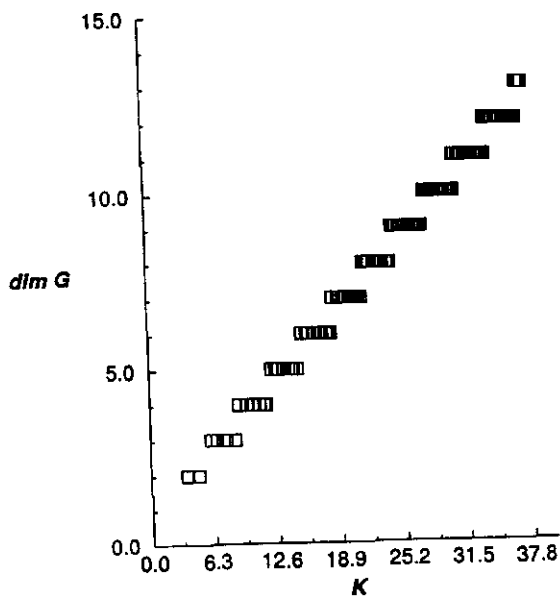


Figura 3.7: A dimensão da matriz de Bogomolny  $\hat{G}$  como função do número de onda  $\kappa$ .

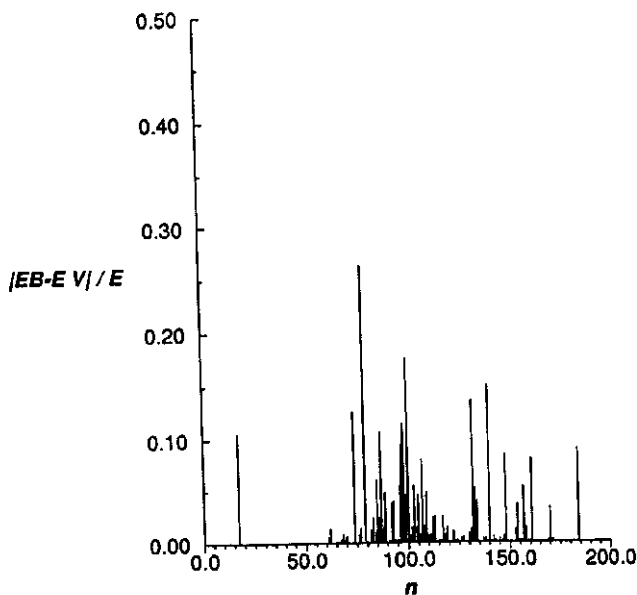
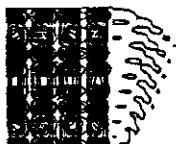


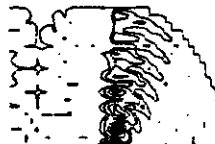
Figura 3.8: Comparação do nosso espectro (EB) com o espectro de Vergini e Saraceno (EV), em unidades do espaçamento médio de níveis. No eixo horizontal,  $n$  representa a sequência de autovalores.



$$\kappa = 28.1169$$



$$\kappa = 25.2175$$



$$\kappa = 24.3744$$



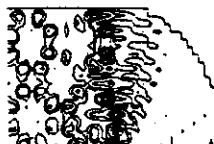
$$\kappa = 34.7367$$



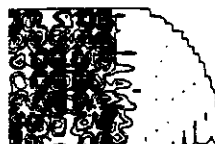
$$\kappa = 27.7044$$



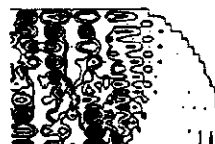
$$\kappa = 23.8106$$



$$\kappa = 28.0063$$



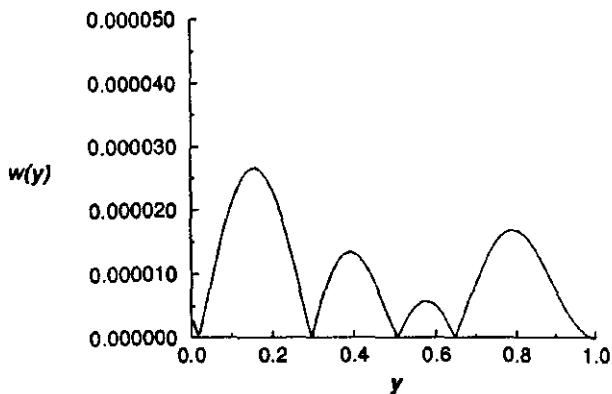
$$\kappa = 26.9704$$



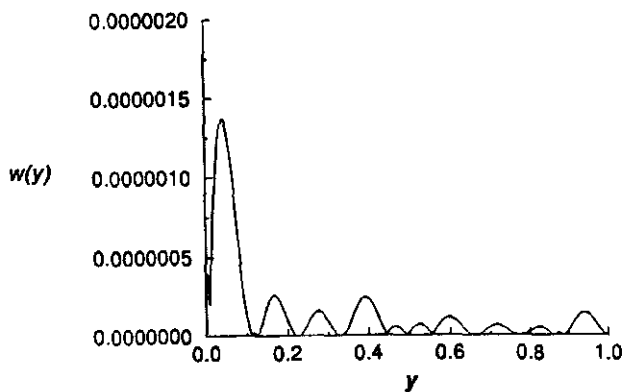
$$\kappa = 32.9431$$

Figura 3.9: As autofunções obtidas como expansões de eq(3.4) e (3.15).  $\kappa$  é o número de onda.





$$\kappa = 8.8807 \quad n = 8$$



$$\kappa = 28.2478 \quad n = 100$$

Figura 3.10: Dois exemplos do Wronskiano,  $w(y) \geq 0$ , na seção.

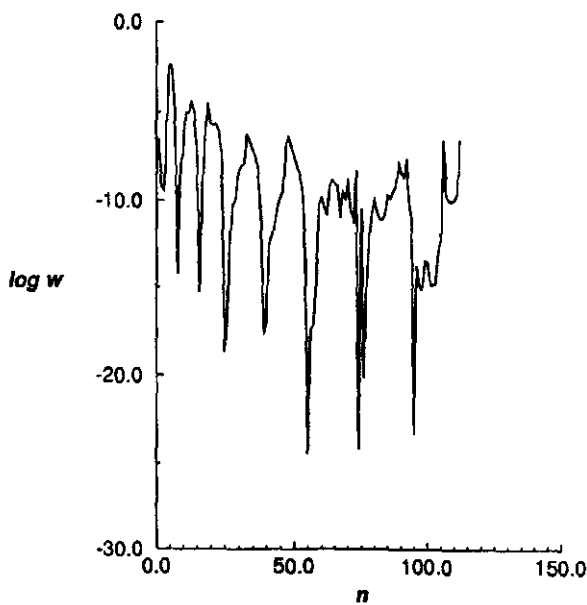


Figura 3.11: A integral do wronskiano na seção. No eixo horizontal,  $n$  representa a sequência de autovalores.

# Capítulo 4

## II Teoria Assintótica

O algoritmo desenvolvido, no capítulo 3, permite-nos calcular os autovalores e as autofunções do estádio dessimetrizado a partir da prévia informação sobre a seção de Bogomolny. Este algoritmo segue a seguinte sequência: Primeiro é preciso calcular as diferentes ordens que zeram as funções de Bessel, para um dado  $\kappa$ . Em seguida calculamos as diferentes integrais que constituem os elementos da matriz, que representam a transformação de uma das bases para a outra e viceversa. Finalmente é só calcular os zeros do determinate de  $\hat{G}$ , isto determina os autovalores. As autofunções são calculadas pelo prévio cálculo da densidade.

Nesta seção pretendemos calcular para o estádio, os autovalores e as autofunções de estados altamente excitados. Para isto faremos um rápido estudo do regime assintótico das funções de Bessel. Isto permitirá calcular as diferentes ordens que fazem com que  $J_\nu(\kappa) = 0$ , assim como facilitará fazer os cálculos analíticos para as diversas integrais sobre a seção.

### 4.1 As funções de Bessel de grande argumento

Fica mais simples resumir o comportamento assintótico das funções de Bessel definindo  $z = \frac{\kappa}{\nu}$ , o quociente do argumento e a ordem[29]. Interessados em descrever o comportamento das funções de Bessel como função da sua ordem; fixamos o argumento

e mudamos apenas a ordem. Encontramos que quando  $z > 1$  a região envolve oscilações, o caso em que  $z \approx 1$  é uma região de transição e finalmente passa-se a ter um comportamento exponencialmente decrescente numa região em que  $z < 1$  (Apêndice C).

Interessados na região  $z > 1$ , na qual  $J_\nu(\kappa)$  oscila, aqui explicitamos a sua forma funcional[29]:

$$J_\nu(\kappa) \approx M(\kappa, \nu) \cos \left[ Q(\kappa, \nu) - \frac{\pi}{4} \right], \quad (4.1)$$

onde :

$$M(\kappa, \nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - \nu^2}}}, \quad (4.2)$$

$$Q(\kappa, \nu) = \sqrt{\kappa^2 - \nu^2} - \frac{\nu\pi}{2} + \nu \arcsin \left( \frac{\nu}{\kappa} \right).$$

Como mostraremos numericamente, esta fórmula é bem melhor que a expressão usual linearizada, válida apenas quando  $\frac{\kappa}{\nu} \gg 1$ .

Podemos calcular os diferentes  $\nu_n$  que zeram a função de Bessel analisando apenas a fase da função(4.1), para um dado  $\kappa$  :

$$Q(\kappa, \nu) - \frac{\pi}{4} = (2n - 1) \frac{\pi}{2}; \quad n \in \mathbb{Z} \geq 1. \quad (4.3)$$

Esta equação transcendental é resolvida numericamente.

Podemos fazer algumas previsões na consideração das seguintes aproximações :

$$\sqrt{\kappa^2 - \nu^2} \approx \kappa \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\kappa^2} \right);$$

$$\arcsin \left( \frac{\nu}{\kappa} \right) \approx \frac{\nu}{\kappa},$$

que substituídas na expressão (4.3), nos conduz a

$$\frac{\nu^2}{2\kappa} - \frac{\nu\pi}{2} + \left\{ \kappa - (2n - 1) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right\} = 0. \quad (4.4)$$

Resolvendo a equação (4.4) ,obtemos

$$\nu_n = \kappa \left\{ \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - \frac{2}{\kappa} \left[ \kappa - \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]} \right\}. \quad (4.5)$$

Sendo  $\frac{\kappa}{\pi} < 1$ , só consideramos a solução com sinal menos, além disto

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{2}{\kappa} \left\{ \kappa - \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right\} < \frac{\pi^2}{4},$$

ou seja,

$$\kappa > \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}. \quad (4.6)$$

Definindo  $\kappa$  no intervalo  $[l\pi, (l+1)\pi]$  com  $l \in \mathbb{Z} \geq 1$ , podemos escolher  $\kappa = (l+\delta)\pi$ , onde  $\delta \in [0, 1]$ . Assim (4.6) toma a forma

$$\frac{\kappa}{\pi} = l + \delta \geq n - \frac{1}{4}. \quad (4.7)$$

A partir desta expressão calculamos os possíveis valores de  $n$  :

$$\delta > \frac{3}{4} \quad ; n \leq l+1,$$

$$\delta < \frac{3}{4} \quad ; n \leq l.$$

Com isto concluímos que dado  $\kappa \in [l\pi, (l+1)\pi]$ , esperamos o conjunto  $\nu$  seja:

$$\begin{cases} \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{l-1}, \nu_l & ; l\pi < \kappa < (l + \frac{3}{4})\pi \\ \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{l-1}, \nu_l, \nu_{l+1} & ; (l + \frac{3}{4})\pi < \kappa < (l+1)\pi. \end{cases}$$

Verifica-se a afirmação feita no capítulo 3, segundo a qual ao incluir o único modo não oscilante na região circular sempre incluímos pelo menos um modo não oscilante na região retangular.

## 4.2 As Integrais sobre a Seção de Bogomolny

Resulta mais simples calcular as integrais sobre a seção de Bogomolny subtraindo da integral no espaço total a integral da sua região complementar, ou seja:

$$\int_0^1 dy[] = \int_0^\infty dy[] - \int_1^\infty dy[].$$

Este simples artifício nos permitirá usar uma mistura de expressões exatas e aproximações assintóticas, isto é, expressões exatas como é o caso da primeira integral,  $\int_0^\infty dy[]$ ,

e métodos aproximados como são o método da fase estacionária ou a integral de borda estacionária, para integrar a expressão complementar,  $\int_1^\infty dy$ . Aqui calcularemos tanto as integrais que definem as matrizes de transformação, quanto as integrais que normalizam as funções de Bessel.

#### 4.2.1 Os elementos de matriz e as suas integrais

A região  $y \in [0, \infty >$

Devemos enfatizar que as expressões a serem citadas são todas resultados exatos[35].

No quarto de círculo as ondas reais são relacionadas com a função de Bessel de ordem  $\nu > 0$ . No que respeita a região retangular as ondas reais estão associadas com os modos de  $m\pi < \kappa$ , em caso contrario ( $m\pi > \kappa$ ) os correspondentes modos são do tipo não oscilante. Vejamos a seguir as suas integrais:

$$\int_0^\infty J_\nu(\kappa y) \sin(m\pi y) dy = \begin{cases} \frac{\sin(\nu \arcsin(\frac{m\pi}{\kappa}))}{\sqrt{\kappa^2 - m^2\pi^2}} & ; m\pi < \kappa \\ \left\{ \frac{\kappa}{m\pi + \sqrt{m^2\pi^2 - \kappa^2}} \right\}^\nu \frac{\cos(\frac{\nu\pi}{2})}{\sqrt{m^2\pi^2 - \kappa^2}} & ; m\pi > \kappa, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\int_0^\infty J_\nu(\kappa y) \sin(m\pi y) \frac{dy}{y} = \begin{cases} \frac{\sin(\nu \arcsin(\frac{m\pi}{\kappa}))}{\nu} & ; m\pi < \kappa \\ \left\{ \frac{\kappa}{m\pi + \sqrt{m^2\pi^2 - \kappa^2}} \right\}^\nu \frac{\sin(\frac{\nu\pi}{2})}{\nu} & ; m\pi > \kappa. \end{cases}$$

No caso dos modos não oscilantes no quarto de circunferência, considera-se a mistura das funções de Bessel de ordem zero (3.44)

$$\mathcal{J}_0(\kappa y) = Y_0(\kappa)J_0(\kappa y) - J_0(\kappa)Y_0(\kappa y).$$

Podemos integrá-las por separado:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty J_0(\kappa y) \sin(m\pi y) dy &= \begin{cases} 0 & ; m\pi < \kappa \\ \frac{1}{\sqrt{m^2\pi^2 - \kappa^2}} & ; m\pi > \kappa, \end{cases} \\
 \int_0^\infty J_0(\kappa y) \sin(m\pi y) \frac{dy}{y} &= \begin{cases} \arcsin\left(\frac{m\pi}{\kappa}\right) & ; m\pi < \kappa \\ \frac{\pi}{2} & ; m\pi > \kappa, \end{cases} \\
 \int_0^\infty Y_0(\kappa y) \sin(m\pi y) dy &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{m\pi}{\kappa}\right) & ; m\pi < \kappa \\ \frac{2}{\pi} \frac{\ln\left(\frac{m\pi}{\kappa} - \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{\kappa^2} - 1}\right)}{\sqrt{m^2\pi^2 - \kappa^2}} & ; m\pi > \kappa, \end{cases} \\
 \int_0^\infty Y_0(\kappa y) \sin(l\pi y) \frac{dy}{y} &= \begin{cases} 0 & ; m\pi < \kappa \\ \ln\left(\frac{m\pi}{\kappa} - \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{\kappa^2} - 1}\right) & ; m\pi > \kappa. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

A região  $y \in [1, \infty >$

Vejamos antes que para  $y \geq 1$  o quociente  $z = \frac{\kappa y}{\nu} > 1$ . Então podemos usar as expressões[29]:

$$J_\nu(y) \approx M(y) \cos\left[Q(y) - \frac{\pi}{4}\right]; \tag{4.10}$$

$$Y_\nu(y) \approx M(y) \sin\left[Q(y) - \frac{\pi}{4}\right],$$

onde

$$M(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 y^2 - \nu^2}}}; \tag{4.11}$$

$$Q(y) = \sqrt{\kappa^2 y^2 - \nu^2} - \nu \frac{\pi}{2} + \nu \arcsin\left(\frac{\nu}{\kappa y}\right).$$

As integrais a serem resolvidas tem a forma geral

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^\infty A(y) \cos(Q(y) - \frac{\pi}{4}) \sin(m\pi y) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty A(y) \{ \sin q^+ - \sin q^- \} dy \\
 &= \frac{1}{2} \Im \int_1^\infty A(y) \{ e^{iq^+} - e^{iq^-} \} dy,
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

onde  $\Im$  determina a parte imaginária e

$$\begin{aligned}
 q^\pm(y) &= Q(y) - \frac{\pi}{4} \pm m\pi y, \\
 A(y) &= \begin{cases} M(y) \\ \frac{1}{y} M(y). \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

No limite quando  $y$  vai para infinito,  $A(y) \rightarrow 0$ . Além disso as fases  $q^\pm$  mudam rapidamente, neste mesmo limite. Estes simples argumentos justificam a aplicabilidade dos métodos de integração assintótica como são

- Integração por fase estacionaria, aplicável só se a fase  $q^\pm$  for não linear em  $y$ , isto exclue as funções de ordem zero e os modos não propagantes  $m\pi > \kappa$  (ondas não reais).
- Integração por borda estacionaria, aplicável mesmo nos casos em que a fase for linear em  $y$ .

Em relação com as integrais calculadas via borda estacionaria, afirmamos que pelo menos em primeira ordem estas não contribuem ( **Apêndice D**) e verifica-se numericamente que podemos prescindir delas. Enquanto que as integrais calculadas por fase estacionária contribuem dramaticamente, como será mostrado numericamente.



## Integração por fase estacionária

Recorrendo à equação (4.12), vemos que a expressão geral com a qual lidaremos tem a forma

$$\int_a^b f(y) e^{iq(y)} dy. \quad (4.14)$$

Aqui, assume-se que as contribuições relevantes estão em torno dos pontos  $y_0$  que fazem com que a fase seja estacionária:

$$\partial_y q(y_0) = 0 \quad ; a < y_0 < b. \quad (4.15)$$

Podemos expandir ambas as expressões  $q(y)$  e  $f(y)$  em torno do ponto  $y_0$ , até a segunda ordem, assim as integrais são todas gaussianas. Adiante assumiremos que  $f = f(y_0)$ ,  $q = q(y_0)$ ,  $f'' = f''(y_0)$  e  $q'' = q''(y_0)$ , com isto :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(y) e^{iq(y)} dy &\approx f \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(q + \frac{1}{2} q'' t^2)} dt + f' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(q + \frac{1}{2} q'' t^2)} t dt \\ &\quad + \frac{1}{2} f'' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(q + \frac{1}{2} q'' t^2)} t^2 dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nas expressões à direita, a segunda integral é ímpar pelo que a sua contribuição é nula, enquanto a última

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(q + \frac{1}{2} q'' t^2)} t^2 dt \approx \partial_{\frac{1}{2} q''} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(q + \frac{1}{2} q'' t^2)} dt. \quad (4.17)$$

Entretanto o valor da primeira integral à direita em (4.16)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(q + \frac{1}{2} q'' t^2)} dt \approx \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2} q''}} e^{i(q + \frac{\pi}{4})}. \quad (4.18)$$

Finalmente, substituindo (4.18) e (4.17) em (4.16)

$$\int_a^b f(y) e^{iq(y)} dy \approx \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2} q''}} \left\{ e^{i(q + \frac{\pi}{4})} f - e^{i(q - \frac{\pi}{4})} \frac{f''}{2q''} \right\}. \quad (4.19)$$

Já podemos lidar com o problema das integrais:

$$V1_{nm} = \int_1^{\infty} J_{\nu}(\kappa y) \sin(m\pi y) dy, \quad (4.20)$$

$$V2_{nm} = \int_1^{\infty} J_{\nu}(\kappa y) \sin(m\pi y) \frac{dy}{y}.$$

Estas, segundo (4.12), podem ser reescritas de modo geral como:

$$V_{nm} \approx \frac{1}{2} \Im \int_1^{\infty} A(y) \{e^{iq^+(y)} - e^{iq^-(y)}\}, \quad (4.21)$$

onde

$$V_{nm} = \begin{cases} V1_{nm} & ; \text{se } A(y) = M(y) \\ V2_{nm} & ; \text{se } A(y) = \frac{M(y)}{y}, \end{cases} \quad (4.22)$$

e segundo (4.13)

$$q^{\pm}(y) = Q(y) - \frac{\pi}{4} \pm m\pi y. \quad (4.23)$$

Calculemos os pontos estacionários,  $y_0$ , resolvendo

$$\partial_y q^{\pm}(y_0) = \frac{1}{y_0} \sqrt{\kappa^2 y_0^2 - \nu^2} \pm m\pi = 0. \quad (4.24)$$

Estes pontos devem se situar no intervalo  $1 < y_0 < \infty$ ; daí que só contribui a fase com sinal negativo, por esta razão a primeira integral à direita em (4.21) é nula.

Resolvendo (4.24) obtemos :

$$y_0 = \frac{\nu}{\sqrt{\kappa^2 - m^2 \pi^2}} > 1 \quad ; \quad \sqrt{\kappa^2 - \nu^2} < m\pi < \kappa. \quad (4.25)$$

Estabelecido quais são os pontos estacionários,  $y_0$ , substituímos (4.19) em (4.21):

$$V_{nm} = -\sqrt{\frac{\pi}{2Q''}} \left\{ A \sin(Q(y_0) - m\pi y_0) + \frac{1}{2} \frac{A''}{Q''} \cos(Q(y_0) - m\pi y_0) \right\}. \quad (4.26)$$

onde

$$Q(y_0) = \sqrt{\kappa^2 y_0^2 - \nu^2} - \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\nu}{\kappa y_0}\right). \quad (4.27)$$

Definindo

$$h = \frac{\kappa^2 y_0}{2(\kappa^2 y_0^2 - \nu^2)},$$

$$Q'' = \frac{\nu^2}{\kappa y_0^2} \sqrt{\frac{2h}{y_0}},$$

(4.28)

$$\mathcal{Y}_\nu(y_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 y_0^2 - \nu^2}} \sin(Q(y_0) - m\pi y_0),$$

$$\mathcal{J}_\nu(y_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 y_0^2 - \nu^2}} \cos(Q(y_0) - m\pi y_0),$$

e substituindo as respectivas amplitudes (4.22) em (4.26) obtemos as respectivas integrais

$$V1_{nm} = \int_1^\infty J_\nu(ky) \sin m\pi y dy \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2Q''}} \left\{ \mathcal{Y}_\nu(y_0) - \frac{h}{2Q''} \left( \frac{1}{y_0} - 5h \right) \mathcal{J}_\nu(y_0) \right\},$$

(4.29)

$$V2_{nm} = \int_1^\infty J_\nu(ky) \sin m\pi y \frac{dy}{y} \approx -\frac{1}{y_0} \sqrt{\frac{\pi}{2Q''}} \left\{ \mathcal{Y}_\nu(y_0) + \frac{1}{2Q''} (5h^2 + \frac{h}{y_0} + \frac{2}{y_0^2}) \mathcal{J}_\nu(y_0) \right\}.$$

## 4.2.2 O Fator de Normalização

A construção das diferentes funções de Green em cada uma das regiões, depende dos modos próprios estarem normalizados sobre a seção de Bogomolny. Obviamente este problema não é trivial quando lidamos com as funções de Bessel. Discutiremos agora como é que isto pode ser feito usando estas fórmulas e técnicas assintóticas.

### Os modos reais

Note que aqui  $\nu > 0$ . Por outro lado, pelos mesmos argumentos usados na seção anterior

$$\int_0^1 J_\nu^2(y) \frac{dy}{y} = \int_0^\infty J_\nu^2(y) \frac{dy}{y} - \int_1^\infty J_\nu^2(y) \frac{dy}{y}. \quad (4.30)$$

Integrais na região  $y \in [0, \infty)$ : Estas integrais são resolvidas exatamente

[35]

$$\int_0^\infty J_\nu^2(\kappa y) \frac{dy}{y} = \frac{1}{2\nu}. \quad (4.31)$$

Para tratar das integrais na região complementar,  $[1, \infty)$ , vejamos que

$$J_\nu(\kappa y) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{\kappa^2 y^2 - \nu^2}}} \cos\left[Q(y) - \frac{\pi}{4}\right], \quad (4.32)$$

onde

$$Q(y) \approx \sqrt{\kappa^2 y^2 - \nu^2} - \nu \frac{\pi}{2} + \nu \arcsin \frac{\nu}{\kappa y}. \quad (4.33)$$

A terceira integral em (4.30) pode ser reescrita como

$$\int_1^\infty J_\nu^2(\kappa y) \frac{dy}{y} \approx \frac{1}{2} \int_1^\infty A^2(y) \{1 + \cos 2q(y)\} \frac{dy}{y}, \quad (4.34)$$

onde

$$A^2(y) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 y^2 - \nu^2}}, \quad (4.35)$$

$$q(y) = Q(y) - \frac{\pi}{4}.$$

Podemos ainda calcular a primeira integral à direita em (4.34)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_1^\infty A^2(y) \frac{dy}{y} &\approx \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{1}{\kappa y^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\kappa^2 y^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{\pi \kappa} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{\nu^2}{\kappa^2}\right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aqui temos usado o fato de  $\frac{\nu}{\kappa y} < 1$ , para fazer uma expansão em série de Taylor. Enquanto a segunda integral à direita em (4.34)

$$\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{dy}{y} A^2(y) \cos 2q(y), \quad (4.37)$$

pode ser resolvida usando a técnica da fase estacionária. Calculemos primeiro os pontos estacionários

$$\frac{\partial}{\partial y} q(y) = \frac{1}{y} \sqrt{\kappa^2 y^2 - \nu^2} = 0 \rightarrow y = \frac{\nu}{\kappa} < 1. \quad (4.38)$$

Encontra-se que não existem pontos estacionários nesta região, por isto a integral (4.37) se anula.

Finalmente subtraindo (4.36) de (4.31) resolvemos (4.30), a integral que normaliza as funções de Bessel de ordem  $\nu \neq 0$ ;

$$\int_0^1 \frac{dy}{y} J_\nu^2(\kappa y) \approx \frac{1}{2\nu} \left\{1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\nu}{\kappa} + \frac{1}{6} \frac{\nu^3}{\kappa^3}\right)\right\} \geq 0. \quad (4.39)$$

## 4.3 Resultados Numéricos

### Expressões assintóticas para as funções de Bessel

Um fato crucial desta teoria é que podemos usar as excelentes expressões assintóticas para avaliar as funções de Bessel. Só para mostrar isto é que apresentamos os seguintes resultados que repetem os cálculos do capítulo 3, mas que substituem as rotinas numéricas que avaliam as funções de Bessel pelas suas expressão assintóticas (4.1). Vejamos como o cálculo das autoenergias para o quarto de estádio a partir do determinante da matriz real (3.29), cuja dimensão é determinada pelo número de modos reais  $\nu_n$  mais o modo  $\nu_0$ , resulta ser bem eficiente.

Na figura (4.1) exibimos a densidade cumulativa de estados para o estádio com  $a = 1$  e o seu desvio com relação a densidade suavizada média que inclui o termo de Weyl além das correções revisadas em Baltes e Hilf[33].

Mostramos na fig(4.2), o efeito no espectro devido à exclusão dos modos não oscilantes da matriz de Bogomolny. Aqui encontramos que o desvio é sempre menor do que um meio do espaçamento médio de níveis, por isto podemos assumir que os autovalores basicamente tem convergido apesar da pequena dimensão das matrizes usadas, como se mostra na fig (4.3). Note-se a analogia com os resultados apresentados no capítulo 3.

Finalmente comparamos estes autovalores assintóticos com os valores encontrados no capítulo 3 e isto é mostrado na fig(4.4). Aqui pode-se notar que, é bem mais provável o desvio ir diminuindo à medida que  $n$  vai aumentando e isto permite-nos inferir que, à medida que  $\kappa$  cresce, os nossos resultados serão otimizados, mais ainda. É importante acrescentar que este mesmo desvio, quando normalizado com relação ao espaçamento médio, é em geral menor do que um terço e isto pode ser visto na fig(4.5).

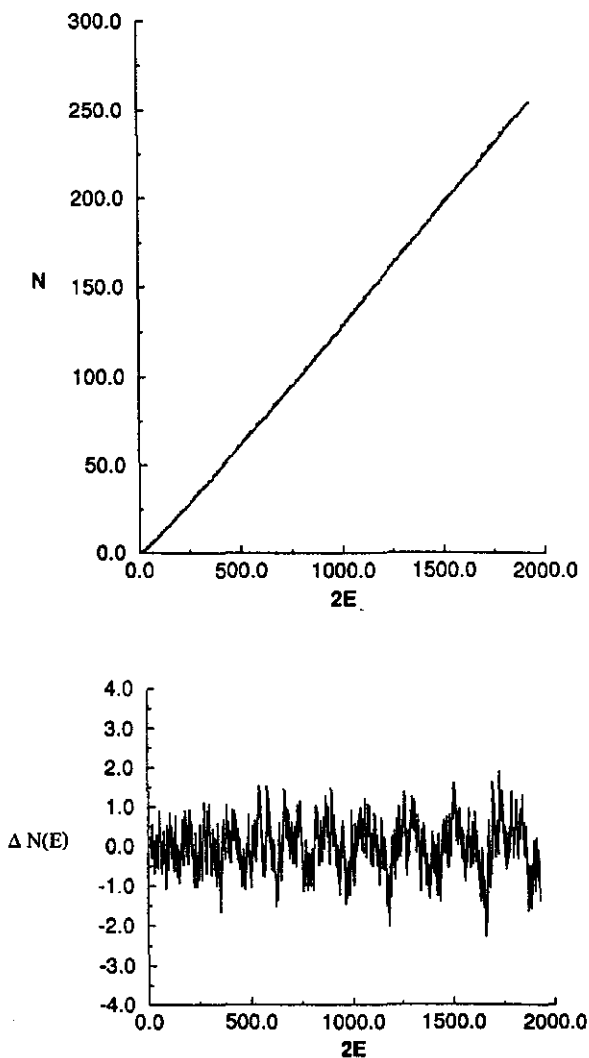


Figura 4.1: A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com  $a = 1$ .

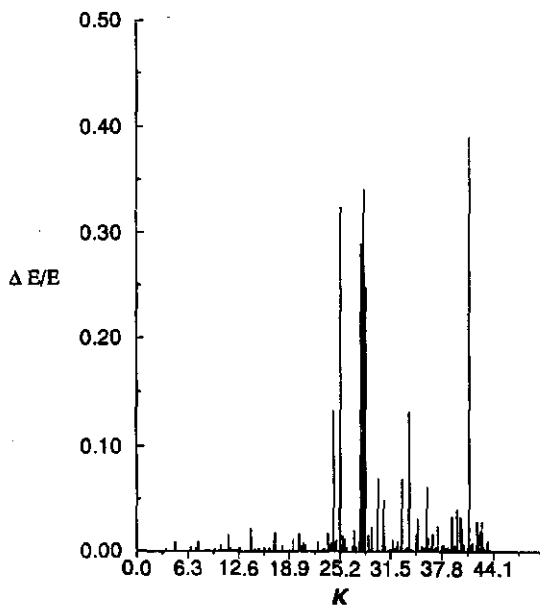


Figura 4.2: Efeito no espectro da exclusão dos modos não oscilantes como função do número de onda  $\kappa$ .

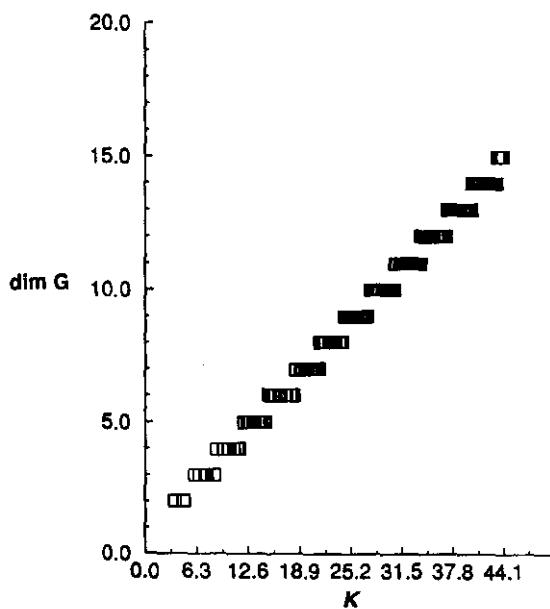


Figura 4.3: A dimensão da matriz de Bogomolny como função de  $\kappa$ .



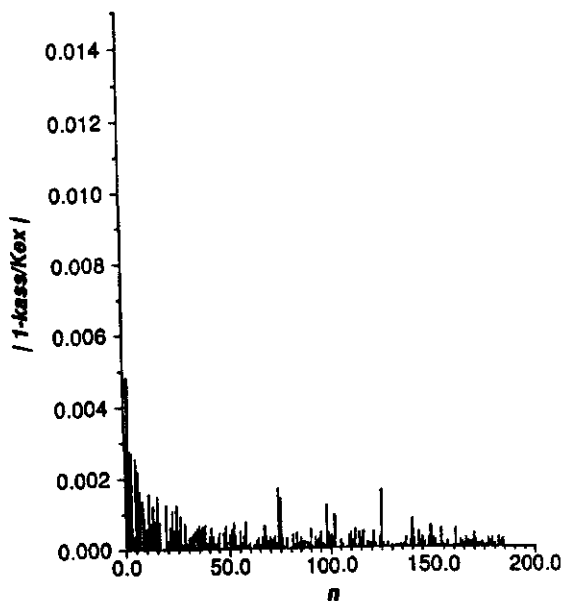


Figura 4.4: Comparação relativa do espectro assintótico com o espectro exato obtido no capítulo 3. No eixo horizontal,  $n$  representa a sequência de autovalores.

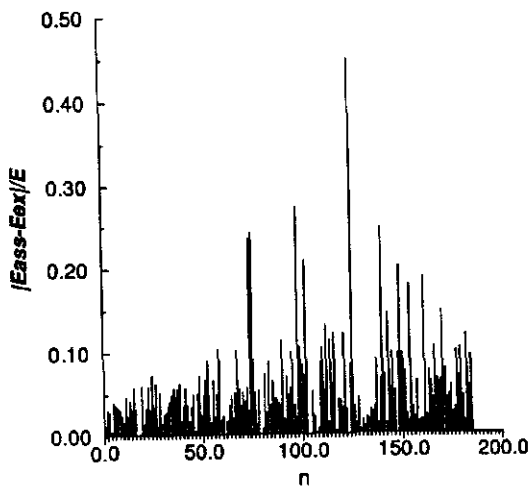


Figura 4.5: Comparação do espectro assintótico com o espectro exato em unidades de espaçamento médio. No eixo horizontal,  $n$  representa a seqüência de autovalores.

## Resultados Numéricos

### Expressões assintóticas para os elementos de matriz

Alguns fatos são cruciais nesta teoria. Além de usarmos as excelentes expressões assintóticas para avaliar as funções de Bessel(4.1), calculamos as integrais na seção, todas analíticas, usando uma mistura de fórmulas exatas(4.8-4.9) e técnicas de fase estacionária(4.29). Só o determinate da matriz real(3.29) é calculado numericamente. Isto tudo, otimiza notavelmente o tempo de computação dos autovalores e das autofunções.

Ressalta-se a relevância das contribuições introduzidas nas integrais pelo método da fase estacionária. Com este fim, vejamos primeiro os resultados quando só consideramos a integral na região  $0 \rightarrow \infty$ . Na fig(4.6) a curva quebrada mostra a densidade cumulativa de estados e seu desvio entorno da densidade cumulativa média de Weyl, incluídas as correções de Baltes e Hilf, e que é representada pela curva contínua. Observe-se que o desvio negativo dá conta da incompleta dos autovalores. Nesta mesma região de energia,  $\sqrt{2E} = \kappa \in [9\pi, 14\pi]$ , apresentam-se os resultados que já incluem a integral complementar ( $1 \rightarrow \infty$ ). Assim, a fig(4.7) mostra a densidade cumulativa de estados e seu desvio entorno da densidade cumulativa média. Os resultados, dentro da região de energia  $\sqrt{2E} = \kappa \in [\pi, 14\pi]$ , são apresentados na fig(4.8).

Podemos ainda fazer uma comparação relativa destes últimos resultados com aqueles obtidos na seção anterior (4.3) e isto é mostrado na fig(4.9). Aqui vemos que o desvio vai diminuindo a medida que  $\kappa$  cresce, isto nos permite afirmar que para  $\kappa$  grande os nossos resultados serão bem melhores, ainda. Incluímos também a fig(4.10) que mostra estas mesmas flutuações, mas agora normalizadas em relação ao espaçamento

médio e resgata-se que esta não é maior do que um meio.

A dimensão das matrizes, avaliadas como função do número de modos  $\nu_n$  ademais do modo  $\nu_0$ , é mostrada na fig(4.11). Finalmente a fig(4.12) mostra as intensidades para algumas das autofunções obtidas como expansões de (3.4) e (3.15).

Com estes excelentes resultados obtidos, passa-se agora a lidar com os cálculos na região de energia  $\sqrt{2E} = \kappa \in [30\pi, 33\pi]$ , bem mais alta. A fig(4.13) mostra a densidade cumulativa de estados e o seu desvio entorno da densidade cumulativa média que inclui as correções de Baltes e Hilf.

Na fig(4.14) mostramos a dimensão das matrizes que precisamos avaliar, definidas pelos modos  $\nu_n$  além do modo  $\nu_0$ . Finalmente a fig(4.15) apresenta as intensidades para algumas das autofunções obtidas como expansões das mesmas expressões (3.4) e (3.15).

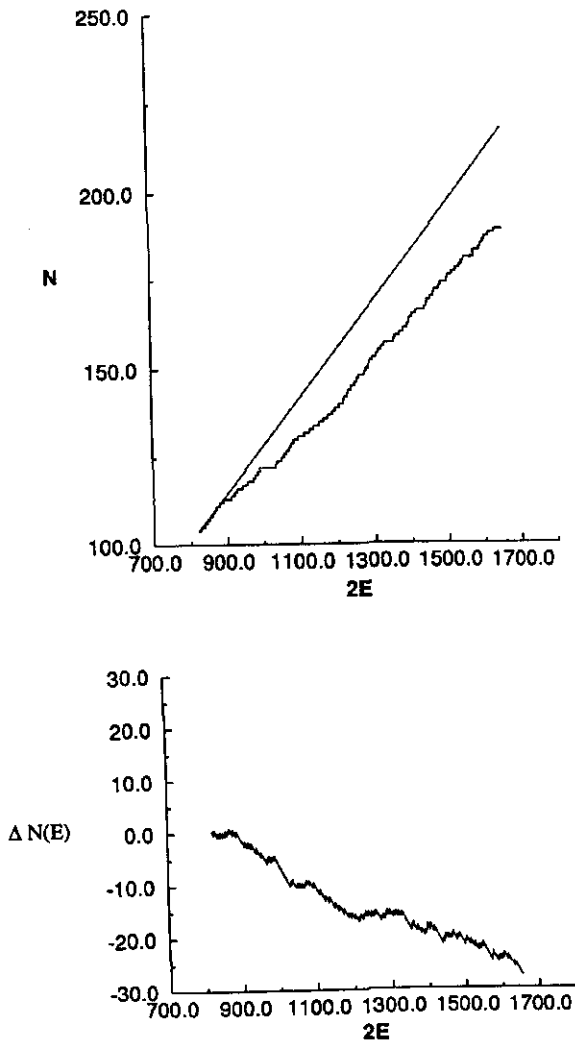


Figura 4.6: A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com  $\alpha = 1$ .  $\kappa \in (9\pi, 14\pi)$ . Aqui não estão sendo incluídas, nas integrais, as correções por fase estacionária.

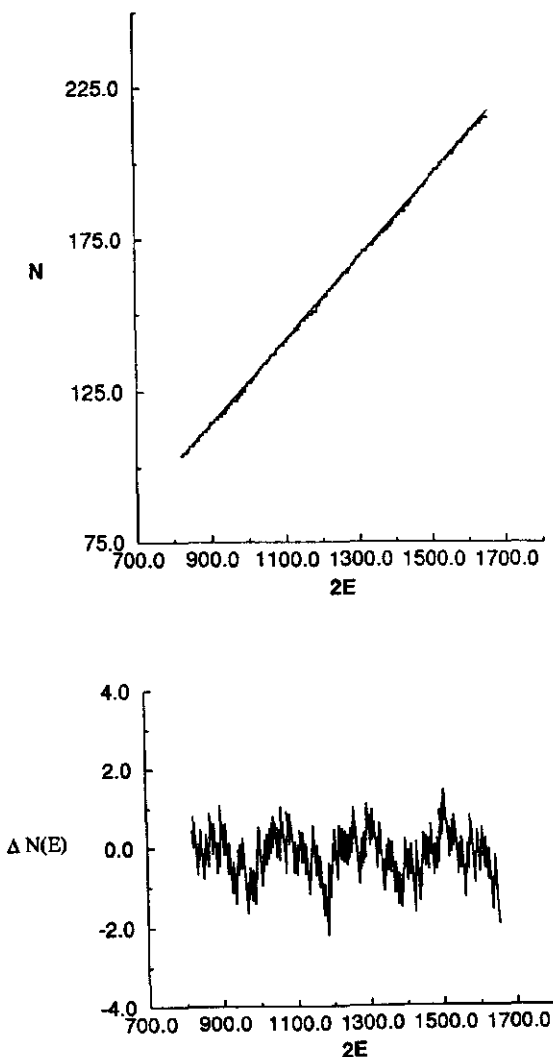


Figura 4.7: A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com  $a = 1$ .  $\kappa \in (9\pi, 14\pi)$ . Aqui já estão sendo incluídas, nas integrais, as correções por fase estacionária.

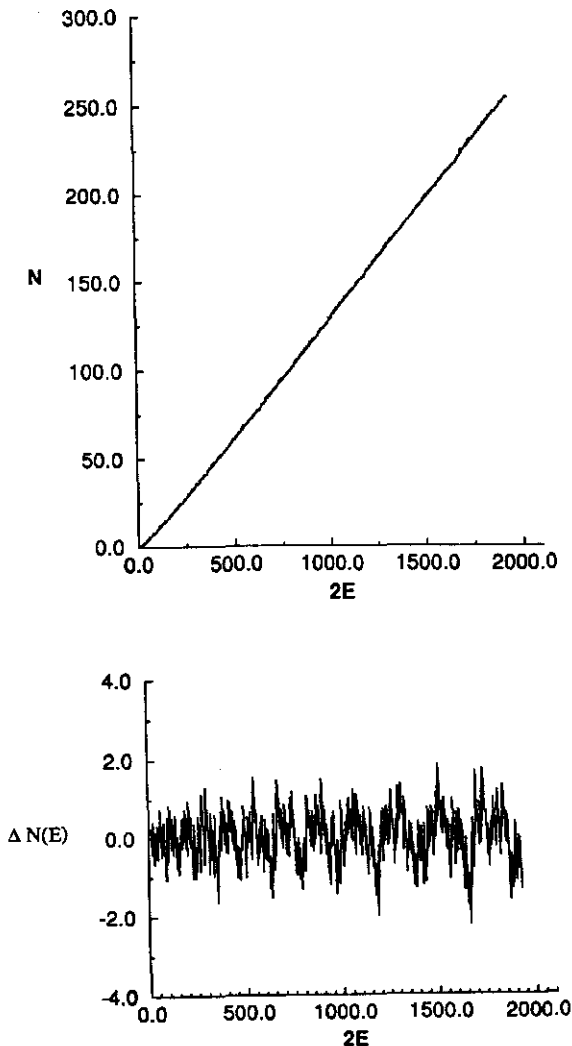


Figura 4.8: A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com  $a = 1$ .  $\kappa \in (\pi, 14\pi)$ . Aqui estão sendo incluídas, nas integrais, as correções por fase estacionária.

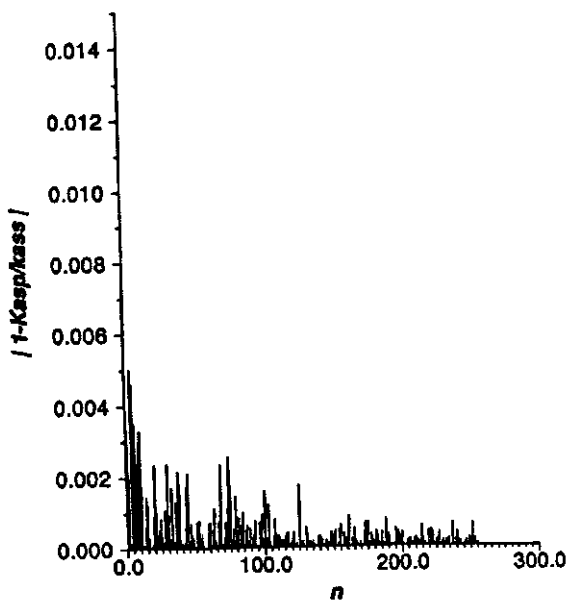


Figura 4.9: Comparação relativa do espectro assintótico aproximado com o espectro assintótico da seção anterior. No eixo horizontal,  $n$  representa a sequência de autovalores.



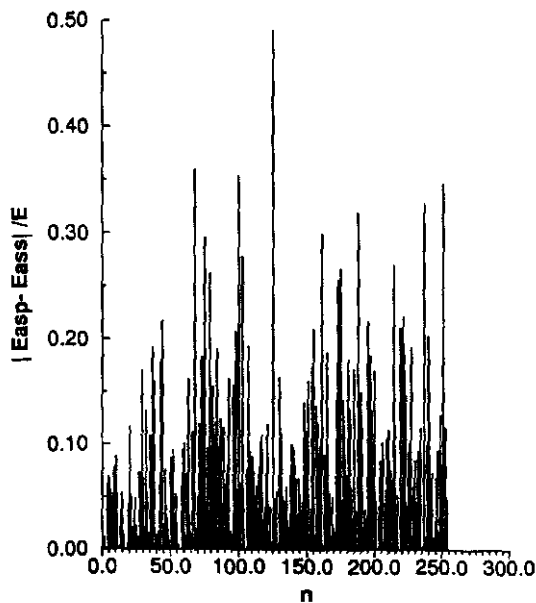


Figura 4.10: Comparação do espectro assintótico aproximado com o espectro assintótico da seção anterior em unidades de espaçamento médio. No eixo horizontal,  $n$  representa a sequência de autovalores.

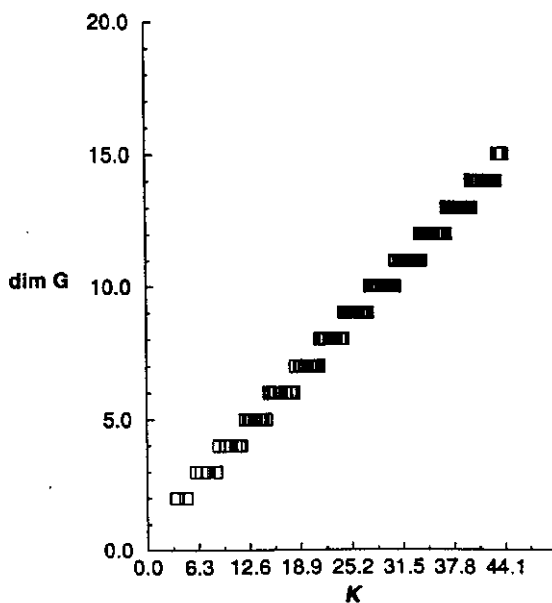
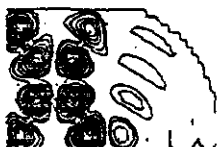


Figura 4.11: A dimensão da matriz de Bogomolny como função de  $\kappa$ .



$$\kappa = 12.7745$$



$$\kappa = 14.1752$$



$$\kappa = 19.0994$$



$$\kappa = 24.3844$$



$$\kappa = 25.2543$$



$$\kappa = 27.7155$$



$$\kappa = 28.0005$$



$$\kappa = 33.8618$$



$$\kappa = 34.7292$$

Figura 4.12: As autofunções obtidas como expansões de eq(3.4) e (3.15).  $\kappa$  é o número de onda.

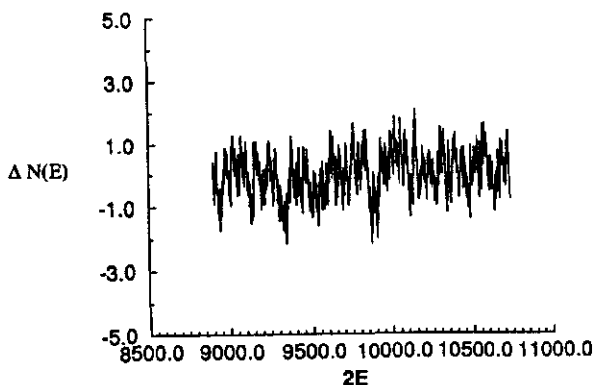
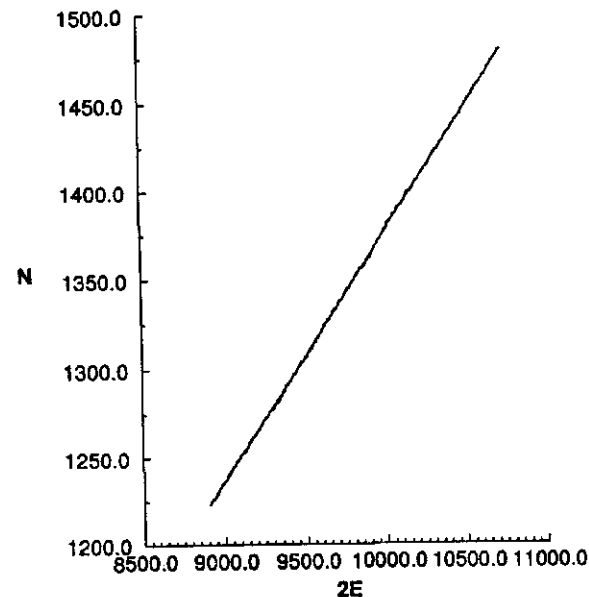


Figura 4.13: A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)), para o estádio com  $a = 1$ .  $\kappa \in (30\pi, 33\pi)$ . Aqui estão sendo incluídas, nas integrais, as correções por fase estacionária.

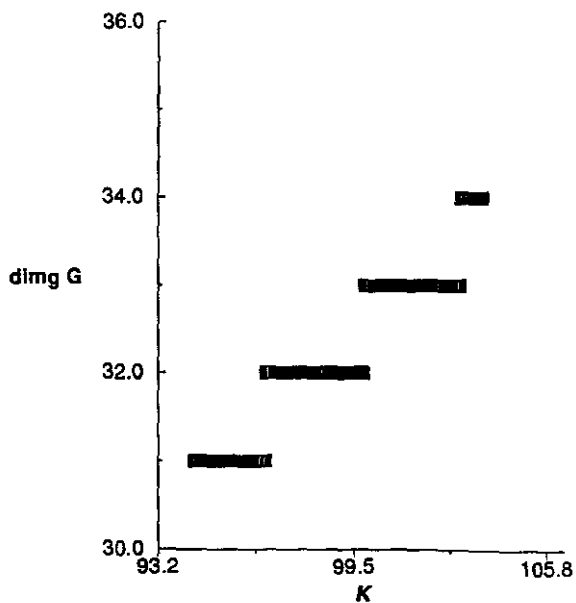


Figura 4.14: A dimensão da matriz de Bogomolny como função de  $\kappa$



$$\kappa = 94.4213$$



$$\kappa = 94.4371$$



$$\kappa = 94.5831$$



$$\kappa = 94.6341$$



$$\kappa = 94.6608$$



$$\kappa = 94.6840$$



$$\kappa = 94.7118$$



$$\kappa = 94.7349$$



$$\kappa = 94.8202$$

Figura 4.15: As autofunções obtidas como expansões de eq(3.4) e (3.15).  $\kappa$  é o número de onda.

- Movimento restrito à região (1),  $S = 2\nu_n \frac{\pi}{2}$ .

A partícula não chega a visitar a região (2).

- Movimento curto.

A partícula vai de  $\phi' \rightarrow x''$ , sem tocar as bordas do bilhar.

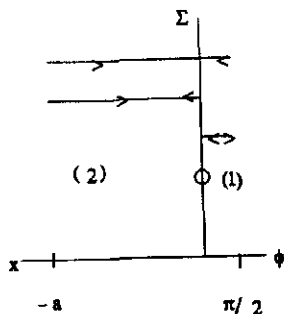


Figura 5.1: As órbitas classificadas pela fração de trajeto do mapa de Poincaré clássico. De cima para baixo esboçamos as quatro possibilidades de movimento entre as regiões (1) e (2) descritas no texto.

Podemos descrever a dinâmica do sistema em termos desta interpretação semiclássica: Na região (2), é muito simples ver que o movimento clássico na direção vertical tem um momentum de modulo  $p_x = m\pi$ , enquanto que na direção horizontal o momentum é  $p_y = \sqrt{2E - m^2\pi^2}$ , como para manter constante a energia total  $E$ . No que diz respeito à região (1) pensa-se numa partícula se movimentando radialmente com momentum  $\kappa = \sqrt{2E}$ , enquanto que roda como uma velocidade angular constante  $\nu_n$ . Na expressão (5.1), o somatório sobre  $m$  e  $n$  expressa apenas os possíveis valores de momentum compatíveis com a energia do sistema clássico. É possível fazer uma representação pictórica da dinâmica clássica do sistema, assim a fig(5.2) mostra o caso de uma partícula se afastando lentamente da seção na região (1) ou (2). De novo as duas regiões se tornam mais comparáveis para  $\rho \neq 0$ .

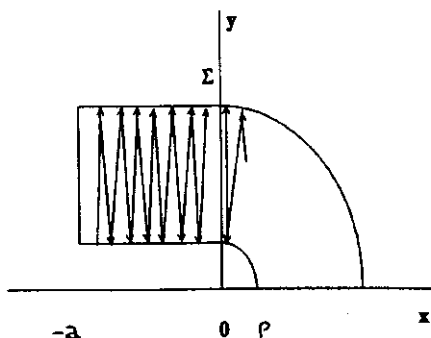


Figura 5.2: O movimento clássico da partícula, aos dois lados da seção, num bilhar pertencente à família de estádios, para o caso de uma partícula com pouca velocidade transversal à seção.

No limite  $\kappa \gg \nu$ , a teoria semiclássica resulta bem simples de ser estudada. Nesta situação, a expressão assintótica das funções de Bessel é [28]

$$J_\nu(\kappa y) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa y}} \cos \left[ \kappa y - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (5.5)$$

Analisando a fase de  $J_\nu(\kappa y)|_{y=1}$ ; calculamos as diferentes ordens que fazem com que esta se anule, para  $\kappa$  fixo:

$$\kappa - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = (2n - 1) \frac{\pi}{2}; \quad (5.6)$$

donde

$$\nu_n \pi \approx \left( 2\kappa + \frac{\pi}{2} \right) - 2n\pi > 0, \quad n \leq \frac{\kappa}{\pi} + \frac{1}{4}. \quad (5.7)$$

Voltando na expressão (5.4) vemos que precisamos entender a grandeza das contribuições das amplitudes  $P_{mn}$  e  $M_{mn}$  definidas em (5.3). Pelos mesmos critérios do capítulo 4, afirmamos que as integrais na seção de Bogomolny são em valor

$$\frac{1}{k_m} < m, 2|1, n > \approx \frac{1}{\nu_n} < m, 2|1, n >^{-1} \propto \frac{1}{\nu_n k_m} \sin \left[ \nu_n \arcsin \frac{m\pi}{\kappa} \right]; \quad m\pi < \kappa. \quad (5.8)$$



## Capítulo 5

### III Teoria Semiclássica

É bem sabido que o espectro de energia de um sistema quantizado relaciona-se com as órbitas periódicas clássicas, dentro de uma teoria semiclássica, mais precisamente, pela fórmula do traço de Gutzwiller [36]. É este o caso dos sistemas clássicos não integráveis.

Nesta seção, nosso interesse é invocar a estrutura clássica das órbitas periódicas que atravessam a seção de Bogomolny. Esta aproximação semiclássica virá da exata condição de autovalores obtida no capítulo 3. Construiremos o operador de Bogomolny, que descreve o mapa semiclássico, na seção  $\Sigma$  da fig.(3.1). Por último obteremos uma expressão para a densidade cumulativa média de estados  $\overline{N}(E)$ .

#### 5.1 As Órbitas Periódicas e o Mapa Semiclássico

A condição de quantização segundo (3.18) estabelece

$$\begin{aligned} \hat{G}(q', q''; E) = \sum_{mn} \langle y'' | 2, m \rangle e^{ik_m(x''+a)} \left\{ \cos k_m a \langle m, 2 | 1, n \rangle^{-1} \frac{\sin \frac{\nu_n \pi}{2}}{\nu_n} \right. \\ \left. + \frac{\sin k_m a}{k_m} \langle m, 2 | 1, n \rangle \cos \frac{\nu_n \pi}{2} \right\} e^{i\nu_n(\frac{\pi}{2} - \phi')} \langle n, 1 | y' \rangle. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Aqui temos substituído para cada região da figura (3.1) as funções de Green representadas em modos próprios, (3.1)-(3.13).

Substituindo as seguintes expressões na equação acima

$$\cos k_m a \sin \nu_n \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \{ \sin (k_m a + \nu_n \frac{\pi}{2}) - \sin (k_m a - \nu_n \frac{\pi}{2}) \};$$

$$\sin (k_m a) \cos (\nu_n \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \{ \sin (k_m a + \nu_n \frac{\pi}{2}) + \sin (k_m a - \nu_n \frac{\pi}{2}) \},$$

$\hat{G}$  reescreve-se como

$$\begin{aligned} \hat{G}(q'q''; E) = \sum_{nm} \langle y'' | 2, m \rangle e^{ik_m(x''+a)} \times \{ P_{mn} \sin (k_m a + \nu_n \frac{\pi}{2}) \\ + M_{mn} \sin (k_m a - \nu_n \frac{\pi}{2}) \} e^{i\nu_n(\frac{\pi}{2}-\phi')} \langle n, 1 | y' \rangle, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde

$$P_{mn} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k_m} \langle m, 2 | 1, n \rangle + \frac{1}{\nu_n} \langle m, 2 | 1, n \rangle^{-1} \right\}; \quad (5.3)$$

$$M_{mn} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k_m} \langle m, 2 | 1, n \rangle - \frac{1}{\nu_n} \langle m, 2 | 1, n \rangle^{-1} \right\},$$

ou

$$\begin{aligned} \hat{G}(y', y''; E) = \frac{1}{i} \sum_{nm} \langle y'' | 2, m \rangle \{ P_{mn} e^{i(k_m(2a+x'')+\nu_n(\pi-\phi'))} \\ + M_{mn} e^{i(k_m(2a+x'')-\nu_n\phi')} - M_{mn} e^{i(k_m x''+\nu_n(\pi-\phi'))} \\ - P_{mn} e^{i(k_m x''+\nu_n\phi')} \} \langle n, 1 | y' \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nesta expressão, já podemos encontrar uma analogia com um mapa de Poincaré clássico. Existem quatro diferentes caminhos clássicos que cruzam a seção. Estes são reconhecidos identificando as respectivas fases dos modos propagantes na eq(5.4). Como é de conhecimento geral, as fases são dadas pela ação clássica ao longo da órbita [37]. Vejamos agora quais são estas órbitas, classificadas pela fração de trajeto do mapa de Poincaré clássico efetuado, como mostra a fig. (5.1).

- Movimento completo,  $S = 2(k_m a + \nu_n \frac{\pi}{2})$ .

A partícula reflete nas bordas  $x = -a$ ,  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , atravessando uma vez a seção.

- Movimento restrito à região (2),  $S = 2k_m a$ .

A partícula não chega a visitar a região (1).

Lembre-se que a contribuição das integrais por borda estacionária na região complementar são nulas. Pela linearidade da fase não existem contribuições por fase estacionária. Com estas considerações temos que, para as integrais na seção, as contribuições não completas se anulam ( $M_{mn} = 0$ ). Restam, somente, as contribuições de órbitas completas e curtas ( $P_{nm} \neq 0$ ) em torno da seção. Podemos tomar o limite  $x'', \phi' \rightarrow 0$  e fazer com que  $M_{nm} = 0$  em (5.4), obtendo

$$\hat{G}(y', y''; E) \approx \frac{1}{i} \sum_{nm} \langle y'' | 2, m \rangle \{ P_{nm} e^{i[k_m 2a + \nu_n \pi]} - P_{nm} \} \langle n, 1 | y' \rangle. \quad (5.9)$$

Tendo levado o problema bidimensional num problema unidimensional, só encontramos um único tipo de órbita completa que atravessa a seção de Bogomolny. Entre estas órbitas que são as que contribuem para o mapa de Poincaré, os pontos fixos do mapa serão as órbitas periódicas do bilhar.

Com a finalidade de identificar o operador de Bogomolny 'T', que descreve o mapa semiclássico, reescrevemos (5.9) na forma

$$\hat{G}(y', y''; E) = \frac{1}{i} \sum_{nm} \langle y'' | 2, m \rangle P_{mn'} \{ P_{n'm'}^{-1} e^{ik_{m'} 2a} P_{m'n} e^{i\nu_n \pi} - \delta_{n'n} \} \langle n, 1 | y' \rangle \quad (5.10)$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{nm} \langle y'' | 2, m \rangle P_{mn'} \hat{g}_{n'n} \langle n, 1 | y' \rangle,$$

onde temos definido

$$P_{mn} P_{nm}^{-1} = P_{n'm}^{-1} P_{mn} = \hat{1}, \quad (5.11)$$

$$\hat{g}_{n'n} = \{ P_{n'm}^{-1} e^{ik_m 2a} P_{mn} e^{i\nu_n \pi} - \delta_{n'n} \}. \quad (5.12)$$

De aqui para a frente, a repetição de sub-índices implica na sua somatória.

Note-se que a condição alternativa que faz com que o determinante de  $\hat{G}$  se anule é

$$\det \hat{g} = 0.$$

Agora, já podemos reconhecer o operador de Bogomolny

$$T_{n'n} = P_{n'm}^{-1} e^{ik_m 2a} P_{mn} e^{i\nu_n \pi}, \quad (5.13)$$

que está sendo representado na base das funções de Bessel .

Quanto à dimensão da matriz  $\hat{G}$ , ela é dada pela expressão semiclássica:

$$Dim = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{\Sigma} dp dq = \frac{\hbar\kappa}{\hbar\pi} = m \quad ; p^2 \leq 2E. \quad (5.14)$$

A matriz é finita e só depende do número de modos verticais com energia menor do que  $E$ , pois só incluímos os modos reais.

Voltemos ao operador de Bogomolny (5.13) e verifiquemos as suas propriedades [18]:

#### • Unitariedade

$$\begin{aligned} T_{n'n} T_{nn'}^\dagger &= P_{n'm}^{-1} e^{2ik_m a} P_{mn} e^{i\nu_n \pi} \left\{ P_{n''m'}^{-1} e^{2ik_{m'} a} P_{m'n} e^{i\nu_n \pi} \right\}^\dagger \\ &= P_{n'm}^{-1} e^{2ik_m a} P_{mn} e^{i\nu_n \pi} e^{-i\nu_n \pi} P_{m'n}^\dagger e^{-2ik_{m'} a} (P_{n''m'}^{-1})^\dagger \\ &= P_{n'm}^{-1} e^{2ik_m a} P_{mn} P_{m'n}^\dagger e^{-2ik_{m'} a} (P_{n''m'}^{-1})^\dagger. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Podemos ver que a condição que faz com que o operador seja unitário vai depender do produto  $PP^\dagger$ . Vejamos que dentro dos limites atribuídos verifica-se que este produto é aproximadamente diagonal. Segundo (5.8)

$$\frac{1}{k_m} < m, 2|1, n > \approx \frac{1}{\nu_n} < m, 2|1, n >^{-1} = P_{mn}.$$

Substituindo estas expressões na definição

$$P_{mn} P_{m'n}^\dagger = P_{mn} P_{nm'} = \frac{1}{k_m} < m, 2|1, n > < n, 1|2, m' >^{-1} \frac{1}{\nu_n}.$$

Mas, segundo (5.7):  $\nu_n \approx \frac{2}{\pi}(\kappa + \frac{\pi}{4} - n\pi)$ . Daí que quando  $\kappa \gg m\pi, n\pi$  ;

$$k_m = \frac{\pi}{2} \nu_n \approx \kappa.$$

Com isto

$$P_{mn} P_{m'n}^\dagger \approx \frac{\pi}{2\kappa^2} < m, 2|1, n > < n, 1|2, m' >^{-1} = \frac{\pi}{2\kappa^2} \hat{1}.$$

Disto segue que

$$P_{nm}^{-1} \approx \frac{2\kappa^2}{\pi} P_{mn}^\dagger.$$

Finalmente

$$(P_{nm}^{-1})^\dagger \approx \frac{2\kappa^2}{\pi} (P_{mn}^\dagger)^\dagger = \frac{2\kappa^2}{\pi} P_{mn},$$

o que reduz em (5.15) a  $TT^\dagger \approx \hat{1}$ . Isto completa a demonstração.

### • Composição Linear

$$\begin{aligned} T_{n'n} T_{nn''} &= P_{n'm}^{-1} e^{2ik_m a} P_{mn} e^{i\nu_n \pi} P_{nm'}^{-1} e^{2ik_{m'} a} P_{m'n''} e^{i\nu_{n''} \pi} \\ &= P_{n'm}^{-1} e^{2ik_m a} P_{mn} P_{nm'}^{-1} e^{2ik_{m'} a} P_{m'n''} e^{2i\nu_{n''} \pi} \\ &= P_{n'm}^{-1} e^{2ik_m a} \delta_{mnm'} e^{2ik_{m'} a} P_{m'n''} e^{2(i\nu_{n''} \pi)} \\ &= P_{n'm}^{-1} e^{2(2ik_m a)} P_{mn''} e^{2(i\nu_{n''} \pi)}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Repetindo o processo  $l$  vezes, temos

$$\underbrace{T \times T \times \cdots T \times T}_l = T^l = P_{n'm}^{-1} e^{l(2ik_m a)} P_{mn''} e^{l(i\nu_{n''} \pi)}. \tag{5.17}$$

Voltando à expressão (5.12), os autovalores semiclássicos são dados pelos zeros do determinante de  $\hat{g}$ . Podemos avaliar este determinante pela expansão em série de potências da matriz  $T$ , usando a fórmula de Plemels-Smithies[38]:

$$\begin{aligned} \det \hat{g}(E) &= \det \{T(E) - 1\} \\ &= \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{1}{m!} \alpha_m(T) = 0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Onde, o  $M$  define a dimensão da matriz  $T$  e

$$\alpha_m(T) = \begin{vmatrix} TrT & m-1 & 0 & \dots & 0 \\ TrT^2 & TrT & m-2 & \dots & 0 \\ TrT^3 & TrT^2 & TrT & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ TrT^m & TrT^{m-1} & TrT^{m-2} & \dots & TrT \end{vmatrix}. \quad (5.19)$$

Aqui,  $\alpha_m$  representa a contribuição de todas as trajetórias periódicas que juntas cruzam a seção de Bogomolny exatamente  $m$  vezes.

Resulta bem simples calcular o Traço de  $T$ ,

$$\begin{aligned} TrT &= \sum_n P_{nm}^{-1} e^{2ik_m a} P_{mn} e^{i\nu_n \pi} \\ &\approx \sum_m P_{mn} P_{nm}^{-1} e^{2ik_m a} e^{i(2\kappa + \frac{\pi}{2})} \\ &= \sum_m \hat{1}_{mm} e^{2ik_m a} e^{i(2\kappa + \frac{\pi}{2})} \\ &= \sum_m e^{2ik_m a} e^{i(2\kappa + \frac{\pi}{2})}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Para chegar nesta expressão recorreremos à expressão (5.7)

$$\nu_n \pi \approx (2\kappa + \frac{\pi}{2}) - 2n\pi,$$

com a qual

$$e^{i\nu_n \pi} \approx e^{i(2\kappa + \frac{\pi}{2})}.$$

Além disto, temos usado a propriedade de invariança do traço frente a uma operação de comutação.

Deve-se acrescentar que tendo mostrado que o operador  $T$  segue a propriedade de composição(5.17), obtemos para

$$TrT^l = \sum_{m=1}^M e^{2ik_m a} e^{li(2\kappa + \frac{\pi}{2})}. \quad (5.21)$$

Substituindo as expressões (5.21) em (5.19) e este último em (5.18) calculamos os autovalores semiclássicos de  $\hat{G}$ .

## 5.2 A densidade cumulativa média

Seguindo Bogomolny[18], é possível calcular a densidade cumulativa média  $\bar{N}(E)$ ,

$$\begin{aligned} e^{2i\pi\bar{N}(E)} &= \det T_{n'n} \\ &= \det P_{n'm}^{-1} e^{2ik_m a} P_{mn} e^{i\nu_n \pi} \\ &= [\Pi_m e^{2ik_m a}] \det P_{n'm}^{-1} \det P_{mn} [\Pi_n e^{i\nu_n \pi}]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Finalmente, tomando o logaritmo da expressão (5.22) obtemos

$$\begin{aligned} \bar{N}(E) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{m=1}^M 2k_m a + \sum_{n=1}^M 2\nu_n \frac{\pi}{2} \right\} \\ &\equiv \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^M \left( k_m a + \nu_m \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ainda, podemos levar a soma discreta em (5.23) numa expressão continua, para isto faremos uso da fórmula de soma de Poisson. Mas calculemos apenas o primeiro termo que troca a soma discreta em (5.23) por uma integral. Obteremos assim a densidade cumulativa média suavizada  $\langle \bar{N}(E) \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}(E) \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\frac{E}{\pi}} \left\{ \sqrt{(\kappa^2 - x^2 \pi^2)} a + \left( \kappa + \frac{\pi}{4} - x\pi \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\kappa^2}{2\pi} \left[ \arcsin \frac{x\pi}{\kappa} + \frac{x\pi}{\kappa} \sqrt{1 - \frac{x^2 \pi^2}{\kappa^2}} \right] a + \left( \kappa + \frac{\pi}{4} \right) x - \frac{\pi}{2} x^2 \right\} \Bigg|_1^{\frac{E}{\pi}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( a + \frac{2}{\pi} \right) \kappa^2 - (3 + 2a)\kappa + \pi \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( a + \frac{2}{\pi} \right) E - \frac{1}{2\pi} (3 + 2a) \sqrt{E} + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Aqui podemos identificar os termos, aproximados, de Weyl incluindo as suas correções previstas segundo Baltes e Hilf[33]:

$$\begin{aligned}
 \text{Area do bilhar} \quad \mathcal{A} &= a + \frac{2}{\pi}, \\
 \text{Perímetro do bilhar} \quad \mathcal{L} &= 3 + 2a, \\
 \text{Curvatura do bilhar} \quad \mathcal{K} &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$



### 5.3 Resultados Numéricos

Um fato importante nesta teoria é que os modos evanescentes, em ambas regiões, são excluídos. Além disto, as fases das funções de Bessel foram linearizadas (5.6) e com isto conseguimos construir um operador de Bogomolny (5.13) aproximadamente unitário (5.15) e que cumpre com a regra de composição (5.17), como a construção de Bogomolny impôs. É importante dizer que o fato de ter retirado as contribuições dos modos evanescentes implicam na exclusão das órbitas clássicas do tipo bouncing ball [24]. Por último, os autovalores são calculados como função do traço do propagador de Bogomolny usando a expressão (5.18) .

Os primeiros resultados foram obtidos para um bilhar com parâmetro  $a = 1$ . Na fig.(5.3) mostra-se a densidade cumulativa de estados e seu desvio entorno da densidade cumulativa média. Esta última é calculada usando a expressão (5.23) e é representada pela curva contínua . A seguir, na fig.(5.4) apresentamos resultados análogos, mas desta vez para um estádio com parâmetro  $a = 5$ .

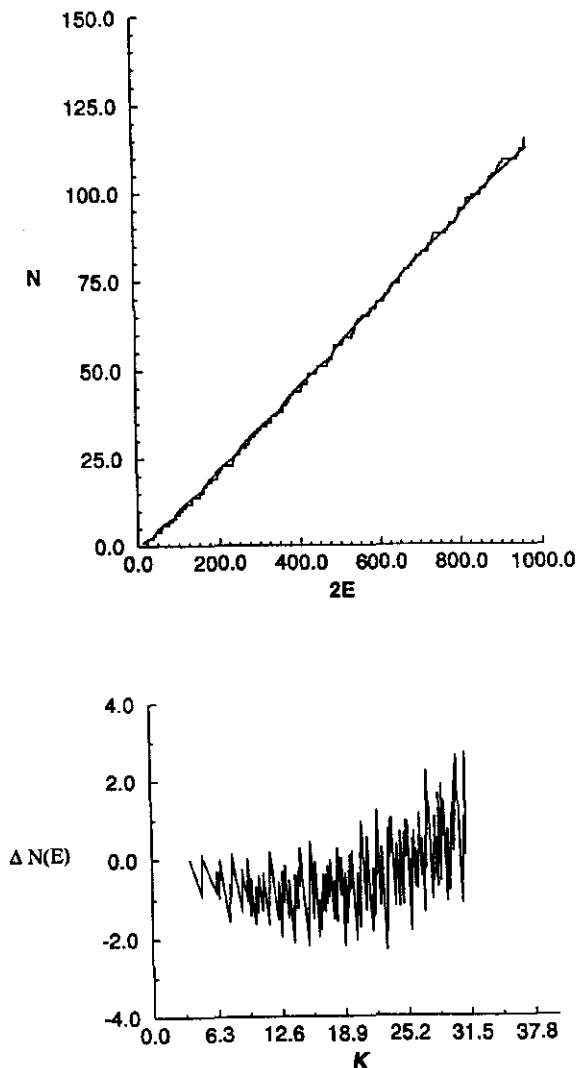


Figura 5.3: A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)) calculada segundo eq.(5.23), para o estádio com  $\alpha = 1$ .

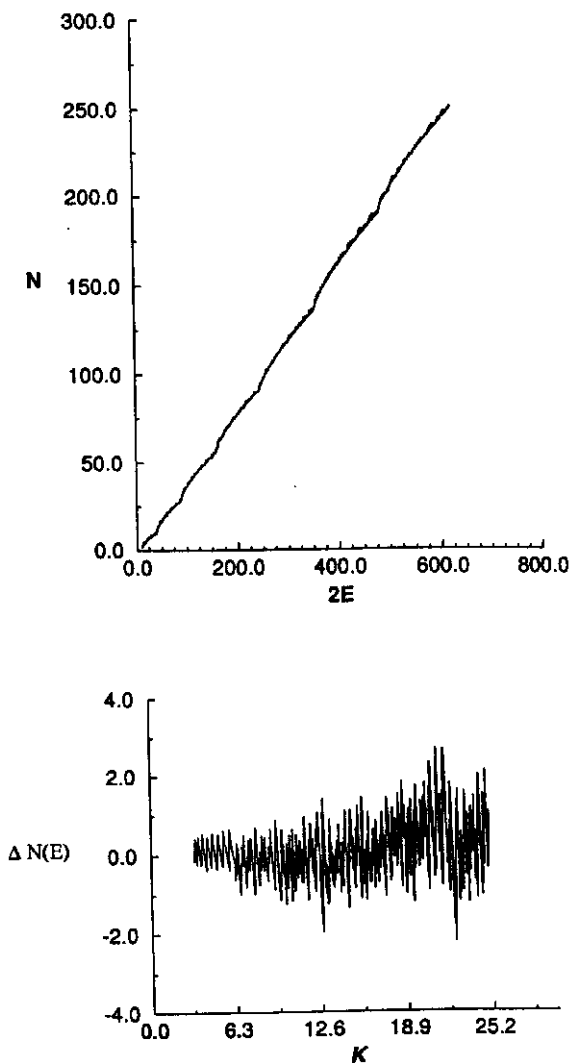


Figura 5.4: A densidade cumulativa de estados (fig. superior, curva quebrada), enquanto que a figura inferior mostra seu desvio em relação à densidade suavizada de Weyl (curva contínua (fig. superior)) calculada segundo eq.(5.23), para o estádio com  $a = 5$ .

# Discussões e Perspectivas

A reformulação da teoria de quantização semiclássica de Bogomolny[18, 19] para ser exata, quânticamente, feita por Ozorio de Almeida [22], não depende da natureza clássica do problema. Daí que podemos usá-la independentemente do sistema ter uma origem clássica integrável ou não.

No bilhar do tipo seção circular, **cap. 2**, a escolha da seção de Bogomolny radial permite-nos representar a função de Green, em energia, em modos próprios radiais, isto conduziu a quantizar primeiro o momento angular. Nesta representação especial o operador de Bogomolny fica sendo diagonal, assim como acontece com o problema da caixa retangular. Quantizando o momento angular os autovalores também podem ser calculados usando a expressão mais geral, eq.(4.1)[29]:

$$\sqrt{\kappa^2 - \nu^2} + \nu \arccos \frac{\nu}{\kappa} = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad ; n \geq 1 \in \mathbb{Z}.$$

Este mesmo resultado foi obtido de forma direta por Robnik[39] e também por Boasman. Este último usou para isto o método semiclássico de integral de borda[40].

Estudando um bilhar circular, Prosen e Robnik[41] afirmam que é impossível conhecer individualmente os autovalores de um sistema quantizado usando métodos semiclássicos. Neste trabalho eles pretendem mostrar que a dispersão dos autovalores semiclássicos com respeito aos exatos cresce com a energia. Aqui expressamos a nossa discrepância com tal afirmação. Verificamos computacionalmente que a fórmula (4.1) fornece bons autovalores, bem perto dos exatos, tal como foi verificado por Boasman[40]. Esta concordância nos induziu a usar as aproximações assintóticas no **capítulo 4**.

Devemos acrescentar que o sucesso desta teoria em aplicações como a caixa

e a própria seção circular, dois sistemas separáveis, verificam que nesses casos a condição de quantização de Bogomolny é necessária e suficiente. Testar esta teoria quantizando um sistema classicamente caótico foi outro desafio. Isto fez do estádio um excelente sistema a ser estudado.

Podemos pensar no estádio como a junção de um retângulo e um quarto de círculo. Cada um destes subsistemas separadamente é classicamente integrável, mas o conjunto não necessariamente precisa sê-lo[23]. Definir a seção exatamente na união destas duas regiões permite-nos formular a teoria construindo explicitamente para cada região uma função de Green representada em modos próprios. Assim, conseguimos estudar além da teoria quântica os limites assintótico e semiclássico. Uma outra vantagem do método é que lida com matrizes de Bogomolny de dimensão finita.

O uso de uma teoria completamente quântica para o quarto de estádio, capítulo 3[42], é um exemplo esclarecedor da teoria de Bogomolny para movimento caótico. Um fato especial é que a família de órbitas do tipo bouncing ball nunca cruza ou toca a seção escolhida, mas isto é compensado pelo fato de que a última destas órbitas realmente coincide com a seção.

Tanner[24], seguindo Sieber et al.[43] e Alonso e Gaspard [44], sustenta que as órbitas bouncing ball podem ser totalmente subtraídas do espectro, porque o determinante espectral fatora em duas partes e uma delas nunca zera. Mas este termo é essencialmente aquela função de Green que propaga livremente ao longo do tubo. Certamente, o espectro contínuo resultante não contribui com autovalores discretos, mas as órbitas bouncing ball não são densas dentro do correspondente movimento clássico. Por esta razão vemos que resulta difícil atribuir parte do espectro a estruturas clássicas específicas: mudando a borda, podemos não alterar certas órbitas, mas sim alteramos a função de Green na qual as órbitas aparecem no limite semiclássico.

É de se observar que, a seção usada por Tanner é perto suficiente às bouncing ball para que as suas contribuições não recaiam completamente sobre os modos evanescentes, ausentes na aproximação semiclássica empregada. Nossos resultados na fig(3.6) mostram que a inclusão de modos não oscilantes origina pequena correção nos autovalores.

Se a seção usada fosse um raio dentro do quarto de círculo, uma série de autoenergias podia estar completamente ausente, dentro da teoria semiclássica. Pode ser interessante verificar esta predição computacionalmente.

Mesmo assim, os modos evanescentes contribuem uma componente significativa às autofunções dominadas pelas cicatrizes das bouncing ball tal como na fig(3.9). Estes estados aparecem frequentemente perto da condição de quantização  $\kappa = m\pi$ , como é esperado, contudo há uma pequena componente aleatória também. Em contraste, o efeito dos modos não oscilantes sobre o espectro de energia perto destes valores é às vezes suprimido, como é mostrado na figura (3.6).

Note-se que há uma singular correspondência entre o desaparecimento dos modos não oscilantes na região anular da fig(3.2) com a supressão das bouncing balls radiais, esmagadas quando o raio interno  $\rho \rightarrow 0$ . Se considerássemos o quarto de estádio originado neste limite, o qual é necessário para a nossa construção, obteríamos dois pontos nos quais a borda junta linhas retas a círculos não analiticamente, em vez de um. Assim esperamos que o desacerto das funções de onda em ambos lados da seção, mostrado na fig(3.10), seja máximo perto de zero ou um, porque estamos fornecendo expressões analíticas em ambos lados da seção para funções de onda que não o são, ao longo da seção.

As fórmulas assintóticas mostraram ser bastante eficientes. Um outro teste não trivial que mostra a validade delas é feito na seção 4.3.1. As figuras: (4.1),(4.2) e (4.3) mostram um comportamento completamente análogo aos seus similares, figuras: (3.5),(3.6) e (3.7); obtidos na seção 3.4. Na figura(4.5) compara-se estes resultados com os resultados quânticos em unidades do espaçamento médio. Observa-se que a dispersão é bem comportada, em correta concordância com os resultados de Boasman[40].

A formulação completamente assintótica, seção 4.3.2, onde usamos a mistura de integrais exatas, eq.(4.8)-eq.(4.9), e aproximadas, eq.(4.29), para avaliar a grandeza dos acoplamentos entre os diferentes modos, também rendeu bons resultados. Otimizamos o tempo de computação. Além disto, os resultados mostrados nas figuras: (4.8),(4.11) e (4.12) estão em acordo com os seus correspondentes, figuras: (3.5), (3.7) e (3.9). A fi-

gura (4.10) mostra que a dispersão em unidades do espaçamento médio concorda com os nossos resultados anteriores. Isto deu extrema confiabilidade ao nosso algoritmo construído e permitiu calcular autovalores em regiões de energia altas, como se mostra nas figuras: (4.13), (4.14) e (4.15). Temos conhecimento de que existem bem poucos métodos que conseguem lidar com este desafio[34].

Invocamos a estrutura das órbitas periódicas em torno da seção a partir da fórmula exata, eq.(3.29). Isto nos permitiu levar o problema bidimensional a um problema em uma dimensão. Neste só existe um tipo de órbitas periódicas, aquelas que batem e refletem nos extremos do bilhar. Construímos um mapa semiclássico na representação de momentum; em condições bem mais gerais que as obtidas por Tanner[24], embora interpretemos o movimento semiclássico de forma bem parecida com ele. Resgata-se que em condições bem particulares mostramos que o operador de Bogomolny é aproximadamente unitário e cumpre com a regra de composição linear, em analogia com a ref.[24].

Neste mesmo limite semiclássico, conseguimos obter uma expressão para a densidade cumulativa média de estados eq.(5.23) e a sua correspondente suavizada eq.(5.25). É nesta última que são reconhecidos os termos que definem, aproximadamente, a geometria do bilhar que incluem as correções segundo Baltes e Hilf[33]. Destacamos a simplicidade deste cálculo, com a metodologia usada. Uzy Smilansky e Iddo Ussishkin na ref. [45], descrevem a real dificuldade deste problema.

Gostaríamos de explorar mais ainda este regime semiclássico. Segundo a análise aqui feita, efetuamos fortes aproximações para chegar numa teoria semiclássica usual. Seria interessante explorar regiões de maior energia para não precisar efetivamente dos modos não oscilantes. Poderíamos também analisar com maior detalhe a influência das contribuições periódicas em relação com as não periódicas no mapa.

Por outro lado, esta mesma metodologia abre a possibilidade de estudar variações do problema por nos resolvido, dificilmente resolvidas por outros métodos, como são: Um estádio sujeito a um potencial constante na borda, ou uma partícula num plano;

sujeita a uma seqüência de potenciais com o perfil de estádio

$$V(x,y)=\begin{cases} y^{\frac{2n+1}{2}} & ; x \leq 0 \\ \{x^2+y^2\}^{\frac{2n+1}{2}} & ; x \geq 0, \end{cases}$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$ .

Podíamos por a prova nosso algoritmo, estudando o mesmo sistema de Lin e Jaffe[30], para investigar o problema de localização.

Finalmente, o método da seção é bem mais geral. A sua generalização para lidar com sistemas não separáveis pode ser um dos desafios futuros.



# Apêndice A

## Ortogonalidade das funções caraterísticas do operador $\mathcal{L}$

Seja  $\mathcal{L}$  um operador de Sturm-Liouville

$$\mathcal{L}Y_\lambda(x) = \partial_x [p(x)\partial_x Y_\lambda(x)] - s(x)Y_\lambda(x) + \lambda r(x)Y_\lambda(x) = 0, \quad (\text{A.1})$$

com autovalor  $\lambda$  e função caraterística  $Y_\lambda(x)$ , restrita às condições de Dirichlet nas bordas.

As funções características do operador  $\mathcal{L}$ , para autovalores diferentes, são sempre ortogonais duas a duas com peso  $r(x)$ .

Esta afirmação pode ser, facilmente, mostrada fazendo certas manipulações sobre a equação acima (A.1) para chegarmos na seguinte expressão

$$p(x) [Y_{\lambda'}(x)\partial_x Y_\lambda(x) - Y_\lambda(x)\partial_x Y_{\lambda'}(x)]_{x=a}^{x=b} = (\lambda' - \lambda) \int_a^b r(x)Y_\lambda(x)Y_{\lambda'}(x)dx. \quad (\text{A.2})$$

Em A.2, o termo entre colchetes, à esquerda, é sempre nulo. Isso, pelas condições de borda,  $Y_\lambda(x)|_{x=a,b} = 0$ . Daí que

$$0 = (\lambda' - \lambda) \int_a^b r(x)Y_\lambda(x)Y_{\lambda'}(x)dx. \quad (\text{A.3})$$

Escolhendo  $\lambda' \neq \lambda$ , não nulos

$$\int_a^b r(x)Y_\lambda(x)Y_{\lambda'}(x)dx = 0. \quad (\text{A.4})$$

Com isto finalizamos a demonstração.

## Apêndice B

# Avaliação aproximada das integrais na seção de Bogomolny

Faremos uma avaliação aproximada das diferentes integrais que mudam as funções senos para as funções de Bessel e vice-versa.

$$\begin{aligned} \langle n, 1 | 2, m \rangle^{-1} &\approx 2 \int_{\kappa}^1 \frac{1}{\sqrt{\pi \kappa y}} \cos \left[ \kappa y - \nu_n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] \sin [m\pi y] dy \\ &\approx \int_{\kappa}^1 \frac{dy}{\sqrt{\pi \kappa y}} \left\{ \sin \left[ (\kappa + m\pi)y - \nu_n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] + \right. \\ &\quad \left. - \sin \left[ (\kappa - m\pi)y - \nu_n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Aqui temos substituído as funções de Bessel pelas suas expressões assintóticas, linearizadas.

Considerando que  $\kappa = m\pi$ , em B.1, a primeira integral à direita decai mais rápido do que a segunda, por esta razão só ficaremos com esta última.

Uma outra consideração a ser feita é que

$$\nu_n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \kappa - n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad (\text{B.2})$$

isto faz com que possamos substituir

$$\sin \left[ (\kappa - m\pi)y - \nu_n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] \Big|_{\kappa=m\pi} = -\sin \left( \nu_n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = (-1)^{m-n}. \quad (\text{B.3})$$

Com tudo isto a expressão B.1, escreve-se como

$$\begin{aligned} \langle n, 1|2, m \rangle^{-1} &\approx o + \frac{(-1)^{m-n}}{\sqrt{\pi\kappa}} \int_{\frac{\pi}{2n}}^1 y^{-\frac{1}{2}} dy \\ &\approx \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{m-n}}{\sqrt{m}} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[ 1 - \frac{n-\frac{1}{2}}{m} \right]} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Da mesma forma podemos calcular a integral

$$\begin{aligned} \langle n, 1|2, m \rangle &\approx 2 \int_{\frac{\pi}{2n}}^1 \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa y}} \cos \left\{ \kappa y - \nu_n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right\} \sin [m\pi y] \frac{1}{y} dy \\ &\approx \int_{\frac{\pi}{2n}}^1 \frac{1}{\sqrt{\pi\kappa y}} \left\{ \sin \left[ (\kappa + m\pi)y - \nu_n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] + \right. \\ &\quad \left. - \sin \left[ (\kappa - m\pi)y - \nu_n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \frac{1}{y} dy. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Usando a mesma série de aproximações feitas com B.1. Isto nos permite escrever

$$\begin{aligned} \langle n, 1|2, m \rangle &\approx \frac{(-1)^{m-n}}{\sqrt{\pi\kappa}} \int_{\frac{\pi}{2n}}^1 y^{-\frac{3}{2}} dy \\ &\approx -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{m-n}}{\sqrt{m}} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{n-\frac{1}{2}}{m} \right)}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

## Apêndice C

# Expressões assintóticas para as Funções de Bessel

Aqui fazemos um rápido estudo das expressões assintóticas para as Funções de Bessel, para isto definimos  $z$  como a razão  $x/\nu$ ; onde o numerador é o argumento e o denominador é a ordem da função de Bessel[29].

Se substituirmos  $x = z\nu$  na equação de Bessel

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} J_\nu(\nu z) + z \frac{d}{dz} J_\nu(\nu z) - \nu^2(1 - z^2) J_\nu(\nu z) = 0, \quad (\text{C.1})$$

e definimos  $u(z)$  pela equação integral

$$J_\nu(\nu z) = \frac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \exp\left\{\int^z u(z) dz\right\}, \quad (\text{C.2})$$

para após substituí-la na equação C.1, obtemos

$$z^2 \{u'(z) + u^2(z)\} + zu(z) - \nu^2(1 - z^2) = 0. \quad (\text{C.3})$$

De aqui em adiante podemos analisar duas situações  $z \gg 1$  e  $z \ll 1$ .

A região  $z < 1$ : Aqui assume-se que para  $\nu$  grandes,  $u(z)$  é expansível numa série geométrica decrescente de  $\nu$

$$u(z) = \nu u_0 + u_1 + u_2/\nu + u_3/\nu^2 + \dots, \quad (\text{C.4})$$

onde  $u_k$  é uma função de  $z$  e é independente de  $\nu$ . Substituindo esta equação, C.4, em C.3 e zerando os coeficientes das varias potências de  $\nu$  obtemos os diferentes  $u_k$

$$u_0 = \sqrt{1-z^2}/z,$$

$$u_1 = z/(1-z^2),$$

$$u_2 = -\frac{4z+z^3}{8(1-z^2)^{5/2}},$$

$$u_3 = \frac{4z+10z^3+z^5}{8(1-z^2)^4}.$$

Após integrar C.2 conforme a definição, obtemos que numa primeira aproximação

$$J_\nu(\nu z) \approx \frac{z^\nu \exp(\nu\sqrt{1-z^2})}{\sqrt{2\pi\nu}(1-z^2)^{1/4}(1+\sqrt{1-z^2})^\nu}. \quad (\text{C.5})$$

A região  $z > 1$ : Fazendo a substituição  $z = \sec \beta$  a expressão C.5 reescreve-se assim

$$\sqrt{\frac{2 \cot \beta}{\nu \pi}} \exp\{-P_\nu \pm iQ_\nu\}, \quad (\text{C.6})$$

onde

$$P_\nu = \frac{\cot^6 \beta}{16\nu^4} (4 \sec^2 \beta + \sec^4 \beta) + O(1/\nu^4);$$

$$Q_\nu = \nu(\tan \beta - \beta) - \frac{\cot^3 \beta}{24\nu} (2 + 3 \sec^2 \beta) + O(1/\nu^3).$$

Quando  $\beta \rightarrow \pi/2$ , estamos na região desejada; aí

$$P_\nu \rightarrow 0,$$

$$Q_\nu \approx \nu(\sec \beta - \pi/2).$$

Disto segue que

$$J_\nu(\nu \sec \beta) = \sqrt{\frac{2 \cot \beta}{\nu \pi}} \cos(Q_\nu - \frac{\pi}{4}); \quad (\text{C.7})$$

$$Y_\nu(\nu \sec \beta) = \sqrt{\frac{2 \cot \beta}{\nu \pi}} \sin(Q_\nu - \frac{\pi}{4}).$$

O termo dominante nesta expansão C.7, pode ser escrito na forma

$$J_\nu(x) = M_\nu \cos(Q_\nu - \frac{\pi}{4}); \quad (C.8)$$

$$Y_\nu(x) = M_\nu \sin(Q_\nu - \frac{\pi}{4}),$$

onde

$$M_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{x^2 - \nu^2}}};$$

$$Q_\nu = \sqrt{x^2 - \nu^2} - \nu \frac{\pi}{2} + \nu \arcsin(\frac{\nu}{x}).$$

A região  $\nu = x$ : Expressando as funções de Bessel na sua forma integral

$$J_\nu(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\{\nu(\theta - \sin \theta)\} d\theta + O(1/\nu), \quad (C.9)$$

e fazendo a seguinte mudança de variáveis:  $\phi = \theta - \sin \theta$ , reescrevemos C.9 na forma

$$\int_0^\pi \cos\{\nu(\theta - \sin \theta)\} d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos \nu \phi}{1 - \cos \theta} d\phi. \quad (C.10)$$

Em C.10, a integral à direita, segundo o teorema de Bromwich[29], toma a forma

$$\int_0^\pi \frac{\cos \nu \phi}{1 - \cos \theta} d\phi \approx \frac{2}{6^{2/3}} \int_0^\infty \phi^{-2/3} \cos \nu \phi d\phi \approx \frac{2}{6^{2/3} \nu^{1/3}} \Gamma(1/3) \cos(\pi/6).$$

Dai que

$$J_\nu(\nu) \approx \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/6} \pi \nu^{1/3}}. \quad (C.11)$$

## Apêndice D

# Integração assintótica pelo método da Borda Estacionaria

Aqui avaliamos as Integrais, na seção, pelo método da borda estacionaria. Para isto considere-se a expressão

$$\int_a^\infty f(y)e^{iq(y)}dy. \quad (D.1)$$

O caráter do integrando é decrescente a medida que  $y \rightarrow \infty$ , por esta razão pressupõe-se que só os pontos na vizinhança da borda  $y = a$ , são relevantes. Daí que podemos expandir  $q$  em torno de  $y = a$ , até uma primeira ordem

$$\int_a^\infty f(y)e^{iq(y)}dy \approx \int_0^\infty f e^{i(q+q' t)}dt. \quad (D.2)$$

Esta integral (D.2) é simplesmente resolvida

$$\int_a^\infty f(y)e^{iq(y)}dy = \frac{1}{q'} f e^{i(q+\frac{\pi}{2})}. \quad (D.3)$$

Aqui assume-se que as funções  $f = f(a)$ ,  $q = q(a)$  e  $q' = q'(a)$ .

Com tudo isto, já podemos lidar com as integrais

$$V1_{nm} = \int_1^\infty J_\nu(\kappa y) \sin(m\pi y) dy; \quad (D.4)$$

$$V2_{nm} = \int_1^\infty J_\nu(\kappa y) \sin(m\pi y) \frac{dy}{y},$$

que podem ser reescritas, de modo geral, como

$$V_{nm} = \frac{1}{2} \Im \int_1^\infty A(y) \{ e^{i\varphi^+(y)} - e^{i\varphi^-(y)} \}. \quad (\text{D.5})$$

Onde

$$V_{nm} = \begin{cases} V_{1nm} & ; A(y) = M(y) \\ V_{2nm} & ; A(y) = \frac{M(y)}{y} \end{cases}$$

e

$$q^\pm(y) = Q(y) - \frac{\pi}{4} \pm m\pi y.$$

Calcula-se  $V_{nm}$  com ajuda de D.3, disto resulta

$$V_{nm} = A(y) \left\{ \frac{1}{2\partial_x q^+} \sin(q^+ + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2\partial_x q^-} \sin(q^- + \frac{\pi}{2}) \right\} \Big|_{y=1}. \quad (\text{D.6})$$

Note-se que

$$\sin(q^\pm(1) + \frac{\pi}{2}) = \cos(q^\pm(1)) = 0,$$

disto segue que  $V_{nm} = 0$ .

Faremos a mesma análise para tratar os modos evanescentes. As integrais a ser avaliadas são similares com as integrais em D.4, é só substituir  $J_\nu \rightarrow \mathcal{J}_0$ , dada por

$$\mathcal{J}_0(y) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa y}} \sin[\kappa(1-y)] = \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa y}} \cos\left[\kappa(1-y) - \frac{\pi}{2}\right]. \quad (\text{D.7})$$

Assim, a integral genérica a ser resolvida é

$$V_{0m} = \int_1^\infty A(y) \cos\left[\kappa(1-y) - \frac{\pi}{2}\right] \sin(m\pi y) dy. \quad (\text{D.8})$$

Esta integral é completamente análoga com à integral D.5, antes resolvida, daí que para avaliá-la analisamos apenas as suas fases em  $y = 1$

$$\sin\left[q^\pm(y) + \frac{\pi}{2}\right] \Big|_{y=1} = \sin\left[\kappa(1-y) - \frac{\pi}{2} \pm m\pi + \frac{\pi}{2}\right] \Big|_{y=1} = 0.$$

Isto faz com que a integral  $V_{0m}$ , D.8, seja também nula.



# Bibliografia

- [1] M. Born , The Mechanics of the Atom (Frederick Ungar Pub. Co.,New York 1960).
- [2] A. Einstein, Verh Dtsch Phys Ges 19 (1917) 82.
- [3] Van Vleck, Proc Natl Acad Sci ( USA) 14 (1928) 178.
- [4] M. C. Gutzwiller, Pysica 5D (1980) 185.
- [5] R. P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integral (McGraw-Hill Book Co.,New York 1965).
- [6] M.C. Gutzwiller, J Math Phys 8 (1967) 1979.
- [7] M.C. Gutzwiller, J Math Phys 11 (1970) 1791.
- [8] M.C. Gutzwiller, J Math Phys 12 (1971) 343.
- [9] M.C. Gutzwiller, J Math Phys 14 (1973) 139.
- [10] M.C. Gutzwiller, J Math Phys 18 (1977) 806.
- [11] M.C. Gutzwiller, Phys Rev Lett 45 (1980) 150.
- [12] R. Balian and C. Block, Ann Phys 69 (1972) 76.
- [13] R. Balian and C. Block, Ann Phys 85 (1974)514.
- [14] M. Sieber and F. Steiner, J Phys A: Math Gen 144 (1990) 159.

- [15] R. Aurich , C. Matthies, M. Sieber and F. Steiner,  
Phys Rev Lett 68 (1992) 1629.
- [16] P. Cvitanovic and B. Eckhardt, J phys A : Math Gen 24 (1991) L237 .
- [17] M. V. Berry and J.P. Keating, J Phys A: math Gen 23 (1990)4839.
- [18] E. Bogomolny, Comments Atomic Molecular Phys (1990) 2567.
- [19] E. Bogomolny, Nonlinearity 5 (1992) 1055.
- [20] T. Prosen, Physica D91 (1996) 244.
- [21] E. Doron and U. Smilansky, Nonlinearity 5 (1992) 10055.
- [22] A. M. Ozorio de Almeida, J Phy A: Math Gen 27 (1994) 2891.
- [23] M. V. Berry, Eur J Phys 2 (1981) 91-102.
- [24] G. Tanner, Preprint (July 1996).
- [25] A.J. Lichtemberg and M.A. Lieberman, Regular and  
Stochastic Motion. New York Springer,1983.
- [26] V. I. Smirnov, A Course of Mathematics vol 3  
(Oxford:Pergamon 1964)
- [27] P.M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical  
Physics New York : Mc Graw Hill 1953.
- [28] M. Abramowitz and A. Stegun, Handbook of Mathematical  
Functions (New York:Dover 1964)
- [29] G. N. Watson, A Treatise on the theory of Bessel  
functions (Cambridge University Press 1944).
- [30] K. Lin and R. L. Jaffe, submitted to Physical Review B  
(November 1995)

- [31] M. V. Berry and A.M. Ozorio de Almeida, J Phy A:Math, Nucl.Gen Vol 6 (1973).
- [32] Willian H Press, Saul A Teukolsky, William T Vetterling  
Brian P Flannery, Numerical Recipes in Fortran  
Cambridge Press University, 1994.
- [33] H.P. Baltes and E.R. Hilf, Spectra of Finite System  
Mannheim: Wissenschaftsverlag (1978).
- [34] E. Vergini and M. Saraceno, Phys Rev E52 (1995) 2204.
- [35] I.J.GradshTEYN,I.M.Ryzhik, Tables of integrals, series  
and products,(Academic Press,New York,1980).
- [36] M. C. Gutzwiller, Chaos in Classical and Quantum Mechanics  
(New York Springer 1990).
- [37] L. S. Schulman, Techniques and Applications of Path  
Integration. (Wiley -Interscience, New York 1981)
- [38] M Reed and B Simon, Methods of Modern Mathematical Physics,  
Vol IV chap XIII Academic Press (New York) 1976.
- [39] M. Robnik, J Phys A: Math Gen 17 (1984a) 1049.
- [40] P.A. Boasman, Nonlinearity 7 (1994) 485.
- [41] Tomaz Prosen and Marko Robnik, J Phys A: Math Gen 26 (1993) L37
- [42] J. S. Espinoza Ortiz and A. M. Ozorio de Almeida, Submitted to  
J Phys A (Dezember 1996)
- [43] M. Sieberg, U. Smilansky, S.C. Creagh and R. G. Littlejohn,  
J Phys A26 (1993) 6217.

- [44] D. Alonso and Gaspard, J Phys A27 (1994) 1599.
- [45] Uzy Smilansky and Iddo Ussishkin, J Phys A : Math Gen  
29 (1996) 2587-2589.